Pacific Journal of Mathematics

# LE SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DE HÉNON–HEILES ET LES VARIÉTÉS DE PRYM

A. Lesfari

Volume 212 No. 1 November 2003

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 212, No. 1, 2003

# LE SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DE HÉNON–HEILES ET LES VARIÉTÉS DE PRYM

A. Lesfari

**On montre que la fibre F définie par l'intersection des invariants du système différentiel de Hénon–Heiles se complète en une surface abélienne $\widetilde{\mathbf{F}}$, par l'adjonction d'une surface de Riemann $\mathbf{\Gamma}$ lisse hyperelliptique de genre 3; laquelle est un revêtement double ramifié le long d'une courbe elliptique $\mathbf{\Gamma_0}$. Aussi $\widetilde{\mathbf{F}}$ peut être identifiée à la duale d'une variété de Prym $\widehat{\mathbf{Prym}(\mathbf{\Gamma}/\mathbf{\Gamma_0})}$ et le système se linéarise sur cette variété.**

## 1. Position du problème.

Le système différentiel de Hénon-Heiles [**7**] s'écrit sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\overset{\bullet}{q}_1= p_1,\\ &\overset{\bullet}{q}_2= p_2,\\ &\overset{\bullet}{p}_1= -Aq_1 - 2q_1q_2,\\ &\overset{\bullet}{p}_2= -Bq_2 - q_1^2 - \varepsilon q_2^2, \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

où A, B, $\varepsilon$ sont des constantes et admet les invariants (intégrales premières) suivants:

(i) Pour $\varepsilon = 1$, on a

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + q_1^2q_2 + \frac{1}{3}q_2^3,\\ H_2 &= p_1p_2 + \frac{1}{3}q_1^3 + q_1q_2^2. \end{aligned}$$

(ii) Pour $\varepsilon = 6$, on a

(1.2)

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + Aq_1^2 + Bq_2^2\right) + q_1^2q_2 + 6q_2^3,\\ H_2 &= q_1^4 + 4q_1^2q_2^2 - 4p_1\left(p_1q_2 - p_2q_1\right) + 4Aq_1^2q_2 + (4A - B)\left(p_1^2 + Aq_1^2\right). \end{aligned}$$

L'intégration des équations (1.1) dans le cas $\varepsilon = 1$, s'effectue au moyen d'intégrales elliptiques et ne pose pas de problèmes. Le cas $\varepsilon = 6$, est plus intéressant mais plus compliqué [**4**] et [**5**]. Lorsque $A = B = 0$, Adler et van Moerbeke [**2**] ont montré que ce cas est lié par une transformation birationnelle au problème de Kowalewski ainsi qu'au flot géodésique sur $SO(4)$ pour une métrique de Manakov. Le but de cette note est d'étudier géométriquement et d'une manière rigoureuse ce problème pour $A$ et $B$ quelconque. Dans tout ce qui va suivre, on pose $\varepsilon = 6$.

## 2. Complète intégrabilité algébrique.

Considérons un systéme hamiltonian complètement intégrable

$$X_H : \overset{\bullet}{x} = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \ J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

où $H$ est l'Hamiltonian et $I$ est la matrice unité. Le système (2.1) possède $n$ intégrales premières $H_1 = H, H_2, \ldots, H_n$ en involution et indépendantes. Pour presque tous les $c_i \in \mathbb{R}$, les variétés invariantes

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} : H_i(x) = c_i \right\},$$

sont compactes, connexes et par le théorème d'Arnold-Liouville [**3**] et [**18**], elles sont difféomorphes aux tores réels $\mathbb{R}^n/r\acute{e}seau$ sur lesquels les flots $g_i^t(x)$ définies par les champs de vecteurs $X_{H_i}, 1 \leq i \leq n$, sont des mouvements rectilignes.

Soient $x \in \mathbb{C}^{2n}, t \in \mathbb{C}$ et $\Delta \subset \mathbb{C}^{2n}$ un ouvert de Zariski. Notons que l'application moment

$$\varphi : (H_1, ..., H_n) : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n,$$

est submersive sur $\Delta$. Soit

$$\begin{aligned} \Pi &= \varphi\left(\mathbb{C}^{2n} \setminus \Delta\right), \\ &= \left\{ c = (c_i) \in \mathbb{C}^n : \exists x \in \varphi^{-1}(c) \ \text{avec} \ dH_1(x) \wedge \cdots \wedge dH_n(x) \ = 0 \right\}, \end{aligned}$$

le lieu critique de $\varphi$ où $c = (c_i)$ est le point courant de $\mathbb{C}^{2n}$ et soit $\overline{\Pi}$ la fermeture de Zariski dans $\mathbb{C}^4$. Rappelons [**1**] et [**14**] que le système (2.1) est *algébriquement complètement intégrable* si pour $c \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{\Pi}$, la fibre $\mathbf{F} = \varphi^{-1}(c)$ est la partie affine d'une variété abélienne (tore complexe algébrique $\widetilde{\mathbf{F}} \simeq \mathbb{C}^n/r\acute{e}seau$), les flots $g_i^t(x), x \in \mathbf{F}, t \in \mathbb{C}$, définies par les champs de vecteurs $X_{H_i}, 1 \leq i \leq n$, sont des mouvements rectilignes sur $\widetilde{\mathbf{F}}$ et les coordonnées $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_n)$ du problème sont des fonctions méromorphes de $(t_1, \ldots, t_n)$. En outre, si le flot hamiltonian (2.1) est algébriquement complètement intégrable, alors ce système admet des solutions sous la forme de séries de Laurent en $t$ telles que chaque $x_i$ explose pour au moins une valeur finie de $t$ et les séries de Laurent de $x_i$ admettent $n-1$ paramètres libres.

Le système (1.1) s'écrit sous la forme (2.1) avec $n = 2$. Plus précisément, on a

$$\dot{x} \equiv f(x) = J\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2.2}$$

avec $x = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ et $H = H_1$ (1.2). Comme l'application polynomiale est continue pour la topologie de Zariski, l'ensemble

$$\left\{x \in \mathbb{C}^4 : \varphi(x) \in \mathbb{C}^4 \setminus \overline{\Pi}\right\},$$

est un ouvert de Zariski dans $\mathbb{C}^4$. On cherche à montrer que pour $c \in \mathbb{C}^4 \setminus \overline{\Pi}$, la fibre

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \varphi^{-1}(c), \\ &= \bigcap_{i=1}^{2} \left\{x \in \mathbb{C}^4 : H_i(x) = c_i\right\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

forme la partie affine d'une surface abélienne et qu'en outre les flots définis par les champs de vecteurs hamiltoniens (engendrés par $H_1$ et $H_2$) sont des mouvements rectilignes sur cette surface abélienne. On procède comme suit: d'abord l'on montre l'existence de solutions $x = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ du système (2.2) sous la forme de séries de Laurent

$$\begin{cases} q_1 = \frac{q_1^{(0)}}{t} + q_1^{(1)} + q_1^{(2)}t + q_1^{(3)}t^2 + \dots, & p_1 = \dot{q}_1, \\ q_2 = \frac{q_2^{(0)}}{t^2} + \frac{q_2^{(1)}}{t} + q_2^{(2)} + q_2^{(3)}t + q_2^{(4)}t^2 + \dots, & p_2 = \dot{q}_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

dépendant de trois paramètres libres: $\alpha, \beta, \gamma$. En substituant ces développements dans le système (2.2), on voit que les coefficients $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$, satisfont aux équations

$$x^{(0)} + f(x^{(0)}) = 0, \tag{2.5}$$

$$(L - kI)x^{(k)} = \text{polynôme en } x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)},\ k \geq 1, \tag{2.6}$$

où $L$ est la matrice jacobienne de (2.5). Les trois paramètres libres $\alpha, \beta$ et $\gamma$ apparaissent respectivement dans l'équation (2.5), l'équation (2.6) pour $k = 1$ et l'équation (2.6) pour $k = 6$. L'étape suivante est fondamentale et consiste à considérer l'ensemble

$$\begin{aligned} \Gamma &= \text{fermeture des composantes continues de} \\ &\quad \left\{\text{séries de Laurent de } x(t) \text{ tels que: } H_1(x) = c_1 \text{ et } H_2(x) = c_2\right\}, \\ &= \bigcap_{i=1}^{2} \left\{\text{coefficient de } t^0 \text{ dans } H_i(x(t)) = c_i\right\}, \\ &= \text{deux relations polynomiales entre les variables } \alpha, \beta \text{ et } \gamma, \\ &= \text{une surface de Riemann hyperelliptique de genre 3 d'équation:} \end{aligned}$$

$$a_1\beta^2 + a_2\alpha^8 + a_3\alpha^6 + a_4\alpha^4 + a_5\alpha^2 + a_6 = 0, \tag{2.7}$$

où

$$a_1 = 36, \quad a_2 = \frac{7}{432}, \quad a_3 = \frac{5}{12}A - \frac{13}{216}B,$$
$$a_4 = \frac{671}{15120}B^2 + \frac{17}{7}A^2 - \frac{943}{1260}BA,$$
$$a_5 = \frac{2}{9}AB^2 - \frac{1}{2520}B^3 - \frac{10}{7}c_1 - \frac{13}{6}A^2B + 4A^3, \quad a_6 = -c_2.$$

Notons que l'application

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, (\alpha, \beta) \mapsto (-\alpha, \beta), \tag{2.8}$$

est une involution sur $\Gamma$ et que cette dernière est un revêtement double

$$\Gamma \to \Gamma_0, (\alpha, \beta) \mapsto (\zeta, \beta), \tag{2.9}$$

ramifié en 4 points d'une courbe elliptique:

$$\Gamma_0 : a_1\beta^2 + a_2\zeta^4 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^2 + a_5\zeta + a_6 = 0. \tag{2.10}$$

Par conséquent, on a le:

**Théorème 1.** *Le système d'équations différentielles* (2.2) *admet une famille de solutions en séries de Laurent méromorphes* (2.4) *dépendant de trois paramètres libres. En outre, le diviseur* $\Gamma$ (2.7) *des poles des fonctions* $x = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ *est une surface de Riemann lisse hyperelliptique de genre* 3; *c'est un revêtement double ramifié en quatre points d'une courbe elliptique* $\Gamma_0$ (2.10).

On va procèder maintenant à la compactification de la fibre $\mathbf{F}$ (2.3) en une surface abélienne $\widetilde{\mathbf{F}}$. La méthode consiste à plonger $\mathbf{F}$ dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ à l'aide des fonctions de $\mathbb{L}(2\Gamma)$. Ce sont des fonctions polynomiales $(1, f_1, \ldots, f_7)$ ayant au pire un pôle double de telle façon que:

$$\dim \mathbb{L}(2\Gamma) = \text{genre de } (2\Gamma) - 1 = 8.$$

Par ailleurs, on montre qu'il existe sur la surface $\widetilde{\mathbf{F}}$ deux différentielles holomorphes $dt_1$ et $dt_2$ telles que:

$$dt_1 \,|_\Gamma = \omega_1, \; dt_2 \,|_\Gamma = \omega_2,$$

où $\omega_1, \omega_2$ sont des différentielles holomorphes (voir Section 3, pour une expression explicite) sur la surface de Riemann $\Gamma$. En outre, l'espace des différentielles holomorphes sur $\Gamma$ est

$$\left\{ f_i^{(0)}\omega_2, 1 \le i \le 7 \right\} \oplus \{\omega_1, \omega_2\},$$

où les $f_i^{(0)}$ sont les premiers coefficients des fonctions $f_i \in \mathbb{L}(2\Gamma)$ et le plongement de $\Gamma$ dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ est à deux différentielles holomorphes prés le plongement canonique:

$$(\alpha, \beta) \in \Gamma \mapsto [\omega_2, f_1^{(0)}\omega_2, \ldots, f_7^{(0)}\omega_2] \in \mathbb{P}^7(\mathbb{C}).$$

La suite consiste à montrer que les orbites du champ de vecteurs (2.2) passant à travers $\Gamma$ forment une surface lisse $S$ tout le long de $\Gamma$ tel que: $S \setminus \Gamma \subseteq \mathbf{F}$. Alors, on prouve que $\widetilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cup S$ est une variété compacte (grâce au fait que les solutions issues des points de $\Gamma$ pénètrent immédiatement dans la partie affine $\mathbf{F}$, plongée dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ à l'aide des fonctions de $\mathbb{L}(2\Gamma)$) et est munie de deux champs de vecteurs réguliers, indépendants en chaque point et commutants. D'après le théorème d'Arnold-Liouville [**3**] et [**18**], la variété $\widetilde{\mathbf{F}}$ est un tore complexe et comme celui-ci possède un plongement projectif, alors $\widetilde{\mathbf{F}}$ est une surface abélienne. Par conséquent, on a le:

**Théorème 2.** *La fibre* $\mathbf{F}$ (2.3) *forme la partie affine d'une surface abélienne* $\widetilde{\mathbf{F}}$ *et le système* (2.2) *est algébriquement complètement intégrable.*

## 3. Surface abélienne en tant que variété de Prym.

Soit $(a_1, b_1, A, B, a_2, b_2)$ une base de cycles de $\Gamma$ de telle façon que les indices d'intersection de cycles deux à deux s'écrivent: $AoB = 1$, $a_i o b_j = \delta_{ij}$ (symbole de Kroneker), $a_i o a_j = a_i o A = a_i o B = b_i o b_j = b_i o A = b_i o B = AoA = BoB = 0$ et qu'en outre: $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(b_1) = b_2$, $\sigma(A) = -A$, $\sigma(B) = -B$ pour l'involution $\sigma$ (2.8). Comme $\Gamma$ est une surface de Riemann hyperelliptique de genre 3, alors les trois différentielles holomorphes sur $\Gamma$ sont

$$\omega_0 = \frac{\alpha d\alpha}{\beta},\ \omega_1 = \frac{\alpha^2 d\alpha}{\beta},\ \omega_2 = \frac{d\alpha}{\beta},$$

et évidemment $\sigma^*(\omega_0) = \omega_0$, $\sigma^*(\omega_k) = -\omega_k$, $k = 1, 2$. Rappelons que l'involution $\sigma$ échangeant les feuillets du revêtement double $\Gamma \to \Gamma_0$, identifie $\Gamma_0$ au quotient $\Gamma/\sigma$. Cette involution induit une involution $\sigma : Jac(\Gamma) \to Jac(\Gamma)$ et modulo un sous-groupe discret, la variété jacobienne $Jac(\Gamma)$ se décompose en deux parties : une partie paire à savoir $\Gamma_0$ et une partie impaire qui n'est autre que la variété de Prym $\mathrm{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)$. Soit

$$\begin{pmatrix} \omega_0(A) & \omega_0(B) & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) & \omega_0(a_2) & \omega_0(b_2) \\ \omega_1(A) & \omega_1(B) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & \omega_1(a_2) & \omega_1(b_2) \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) \end{pmatrix},$$

la matrice des périodes de $Jac(\Gamma)$ où $\omega_k(\circledast) = \int_{\circledast} \omega_k$, $k = 1, 2, 3$. Or

$$\begin{aligned}
\omega_0(A) &= \omega_0(B) = 0,\\
\omega_0(a_2) &= \omega_0(a_1),\\
\omega_0(b_2) &= \omega_0(b_1),\\
\omega_k(a_2) &= -\omega_k(a_1),\ k = 1,2,\\
\omega_k(b_2) &= -\omega_k(b_1),\ k = 1,2,
\end{aligned}$$

donc la matrice précédente s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) \\ \omega_1(A) & \omega_1(B) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & -\omega_1(a_1) & -\omega_1(b_1) \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & -\omega_2(a_1) & -\omega_2(b_1) \end{pmatrix}.$$

En effectuant des combinaisons linéaires simples sur les colonnes, on obtient les deux matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) & 2\omega_0(a_1) & 2\omega_0(b_1) \\ \omega_1(A) & \omega_1(B) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & 0 & 0 \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) & 0 & 0 \\ \omega_1(A) & \omega_1(B) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & 2\omega_1(a_1) & 2\omega_1(b_1) \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & 2\omega_2(a_1) & 2\omega_2(b_1) \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0(a_1) & 2\omega_0(b_1) \end{pmatrix},$$

est la matrice des périodes de $\Gamma_0$, tandis que

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1(A) & \omega_1(B) & 2\omega_1(a_1) & 2\omega_1(b_1) \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & 2\omega_2(a_1) & 2\omega_2(b_1) \end{pmatrix},$$

est celle de $\mathrm{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)$. Considérons l'application (uniformisante)

$$\widetilde{\mathbf{F}} \to \mathbb{C}^2/L_\Lambda : p \mapsto \int_{p_0}^{p} \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix},$$

où $(dt_1, dt_2)$ est une base (considérée dans la Section 2) de différentielles holomorphes sur $\widetilde{\mathbf{F}}$ telles que: $dt_k \mid_\Gamma = \omega_k$, $k = 1, 2$,

$$L_\Lambda = \left\{ \sum_{k=1}^{4} n_k \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix} (\nu_k) : n_k \in \mathbb{Z} \right\},$$

est le réseau associé à la matrice des périodes

$$\Lambda = \begin{pmatrix} dt_1(\nu_1) & dt_1(\nu_2) & dt_1(\nu_3) & dt_1(\nu_4) \\ dt_2(\nu_1) & dt_2(\nu_2) & dt_2(\nu_3) & dt_2(\nu_4) \end{pmatrix},$$

et $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ une base de cycles dans le groupe d'homologie $H_1(\widetilde{\mathbf{F}}, \mathbb{Z})$. D'après le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes [**6**], l'application $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \to H_1(\widetilde{\mathbf{F}}, \mathbb{Z})$ induite par l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{F}}$ est surjective et par conséquent on peut trouver quatre cycles $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ sur la surface de Riemann $\Gamma$ tels que:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1(\nu_1) & \omega_1(\nu_2) & \omega_1(\nu_3) & \omega_1(\nu_4) \\ \omega_2(\nu_1) & \omega_2(\nu_2) & \omega_2(\nu_3) & \omega_2(\nu_4) \end{pmatrix},$$

et

$$L_\Lambda = \left\{ \sum_{k=1}^{4} n_k \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} (\nu_k) : n_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ces cycles sont $\nu_1 = a_1, \nu_2 = b_1, \nu_3 = A, \nu_4 = B$ et ils engendrent $H_1(\widetilde{\mathbf{F}}, \mathbb{Z})$ de telle sorte que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & \omega_1(A) & \omega_1(B) \\ \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & \omega_2(A) & \omega_2(B) \end{pmatrix},$$

est une matrice de Riemann. On montre que $\Lambda = \Omega^\star$ ; la matrice des périodes de $\widehat{\mathrm{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)}$ duale de $\mathrm{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)$. Dès lors, les deux variétés abéliennes $\widetilde{\mathbf{F}}$ et $\widehat{\mathrm{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)}$ sont analytiquement isomorphes au même tore complexe $\mathbb{C}^2/L_\Lambda$ et d'après le théorème de Chow, ces variétés sont algébriquement isomorphes. Par conséquent, on a le:

**Théorème 3.** *La surface abélienne* $\widetilde{\mathbf{F}}$ *qui complète la fibre* $\mathbf{F}$ (2.3) *peut être identifiée à la duale d'une variété de Prym* $\widehat{\mathrm{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)}$ *du revêtement double* (2.9).

## References


[1] M. Adler and P. van Moerbeke, *The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis*, Invent. Math., **7** (1989), 3-51, MR 90f:58079, Zbl 0678.58020.

[2] ———, *The Kowalewski and Hénon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on* SO(4)*—a two-dimensional family of Lax pairs*, Comm. Math. Phys., **113** (1987), 659-700, MR 89b:58085, Zbl 0647.58022.

[3] V.I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978, MR 57 #14033b, Zbl 0386.70001.

[4] T. Bountis, H. Segur and F. Vivaldi, *Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property*, Phys. Rev. A, **25** (1982), 1257-1264, MR 83j:58056.

[5] L. Gavrilov, *Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Hénon-Heiles system*, Physica D, **34** (1989), 223-239, MR 90h:58040, Zbl 0689.58014.

[6] P.A. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978, MR 80b:14001, Zbl 0408.14001.

[7] M. Hénon and C. Heiles, *The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments*, Astron. J., **69** (1964), 73-79, MR 28 #1969.

[8] S. Kowalevski, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math., **12** (1989), 177-232, CMP 1 916 790, Zbl 21.0935.01.

[9] A. Lesfari, *Une approche systématique à la résolution du corps solide de Kowalewski*, C. R. Acad. Sci. Paris, **302**, série I, 1986, 347-350, MR 87m:58072, Zbl 0606.34012.

[10] ______, *Abelian surfaces and Kowalewski's top*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., Paris, $4^e$ série, **21** (1988), 193-223, MR 89k:58125, Zbl 0667.58019.

[11] ______, *On affine surface that can be completed by a smooth curve*, Result. Math., **35** (1999), 107-118, MR 2000d:14046, Zbl 0947.14022.

[12] ______, *Geodesic flow on $SO(4)$, Kac-Moody Lie algebra and singularities in the complex t-plane*, Publicacions Matemàtiques, Barcelona, **43** (1999), 261-279, MR 2000f:37078, Zbl 0968.35010.

[13] ______, *Une méthode de compactification de variétés liées aux systèmes dynamiques*, Les cahiers de la recherche, Rectorat-Université Hassan II Aïn Chock, Casablanca, Maroc, I, **1** (1999), 147-157.

[14] ______, *Completely integrable systems: Jacobi's heritage*, J. Geom. Phys., **31** (1999), 265-286, MR 2000f:37077, Zbl 0937.37046.

[15] ______, *The problem of the motion of a solid in an ideal fluid. Integration of the Clebsch's case*, Nonlinear Diff. Eq. Appl., **8** (2001), 1-13, MR 2002e:70007, Zbl 0982.35085.

[16] ______, *The generalized Hénon-Heiles system, abelian surfaces and algebraic complete integrability*, Reports on Math. Phys., **47** (2001), 9-20, MR 2002b:37093.

[17] ______, *A new class of integrable systems*, Arch. Math., **77** (2001), 347-353, MR 2002e:37091, Zbl 0996.70014.

[18] ______, *Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences*, Elem. Math., **58**(**1**) (2003), 6-20, CMP 1 961 831.

[19] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta* II, Progress in Math., Birkhaüser, Boston, 1984, MR 86b:14017, Zbl 0549.14014.

Received February 24, 2000.

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 20, El-Jadida
Maroc
*E-mail address*: lesfari@ucd.ac.ma