Pacific Journal of Mathematics

CALCUL DE LA FONCTION D'ARTIN–GREENBERG D'UNE BRANCHE PLANE

M. Hickel

Volume 213 No. 1 January 2004

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 213, No. 1, 2004

CALCUL DE LA FONCTION D'ARTIN–GREENBERG D'UNE BRANCHE PLANE

M. Hickel

We calculate the Artin–Greenberg function of an irreducible plane curve germ. We deduce from this calculation that the Artin–Greenberg function, together with the multiplicity, determines the topological type of the curve and vice versa.

1. Introduction.

Soient (X, x) un germe d'espace analytique complexe et $\mathcal{O}_{X,x}$ son algèbre locale. Nous désignerons par $\mathcal{N}_{X,x}$ l'espace des arcs analytiques tracés sur (X, x), c'est à dire, $\mathcal{N}_{X,x}$ est l'ensemble des germes de morphismes analytiques $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$, ou bien de facon équivalente, l'ensemble des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres locales $\varphi^* : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_1$. Rappelons maintenant la définition de la fonction d'Artin-Greenberg β de (X, x) (cf. [8] Def. 2). Pour cela, $\mathcal{O}_1$ étant munie de sa valuation naturelle et considérant deux éléments φ, ψ d'un $\mathcal{N}_{Y,y}$, nous noterons $\mathrm{val}\,(\varphi - \psi)$ la valuation de l'idéal de $\mathcal{O}_1$, $(\varphi^* - \psi^*)(m_{Y,y})$, où $m_{Y,y}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,y}$. Soit maintenant I un idéal d'un certain $\mathcal{O}_n$ tel que $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_n/I$. La fonction suivante $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, est dite la fonction d'Artin-Greenberg de (X, x):

- Si $I = (0)$, on pose $\beta(i) = i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
- Si $I \neq (0)$, $\beta(i)$ est le plus petit entier tel que,

$$\forall \varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^n,0}, \mathrm{val}\,\varphi^*(I) \geq \beta(i) + 1 \Rightarrow \exists \psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^n,0}/\psi^*(I) = 0 \quad \text{et } \mathrm{val}\,(\varphi - \psi) \geq i + 1.$$

La définition ne dépend en fait que de l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$ et la fonction d'Artin-Greenberg est une mesure de la singularité de (X, x), puiqu'elle est égale à l'identité si et seulement si (X, x) est lisse. Dans [8], pour un germe d'hypersurface $f = 0$ à l'origine de $\mathbb{C}^n$, nous reliions la fonction d'Artin-Greenberg de $\mathcal{O}_n/f$ à celle de son lieu singulier $\mathcal{O}_n/(f, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$, et nous en déduisions, pour une singularité isolée, une majoration optimale de β en fonction des invariants polaires de l'hypersurface. Pour d'autres résultats nous renvoyons le lecteur à [5], [8] et [9].

Nous proposons ici le calcul complet et exact de la fonction d'Artin-Greenberg d'une branche plane (cf. Th. 2.1). Ce calcul fait apparaître que la fonction d'Artin-Greenberg, jointe à la multiplicité, détermine le type topologique de la branche et réciproquement.

2. Fonction d'Artin-Greenberg d'une branche plane.

Soit $(C, 0)$ un germe, à l'origine de $\mathbb{C}^2$, de courbe plane irréductible de multiplicité n. Désignons par $(r_1, n_1), \ldots, (r_g, n_g)$ ses paires de Puiseux et par $(\beta_0 = n, \beta_1, \ldots, \beta_g)$ la caractéristique de $(C, 0)$ (cf. [**15**]). On a $\frac{\beta_i}{n} = \frac{r_i}{n_1 \ldots n_i}$, $1 \leq i \leq g$. Considérons les entiers $(\overline{\beta}_0 = n, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_g)$ définis par:

$$\overline{\beta}_{q+1} - \beta_{q+1} = n_q \overline{\beta}_q - \beta_q \ , 0 \leq q \leq g-1 \quad n_0 = 1.$$

Rappelons que $(\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_g)$ est un système minimal de générateurs du semi-groupe Γ des valuations de $(C, 0)$ (cf. [**15**]). Par ailleurs, considérons la courbe polaire $P(C)$ associée à C et à une direction L assez générale. Ecrivons $P(C) = \bigcup_{1 \leq i \leq l} \Gamma_i$, où les Γ_i sont les composantes irréductibles de $P(C)$. Soient alors:

$m_i = m(\Gamma_i)$ la multiplicité de Γ_i à l'origine,

$e_i + m_i = (C, \Gamma_i)$ la multiplicité d'intersection de C et Γ_i à l'origine.

D'après M. Merle [**10**], on peut regrouper les Γ_i en g paquets, $\bigcup_{i \in I_q} \Gamma_i$, $1 \leq q \leq g$, de telle sorte que pour $i \in I_q$, on ait:

$$\frac{e_i + m_i}{m_i} = \frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \ldots n_{q-1}}.$$

Nous supposerons dans la suite la numérotation des Γ_i choisie de telle sorte que $q \in I_q$. Par ailleurs, le symbole $[x]$ désignera la partie entière du nombre réel x.

Le résultat suivant donne le calcul complet de la fonction d'Artin-Greenberg d'une branche plane $(C, 0)$.

Théorème 2.1.

1) *Soit i, $1 \leq i \leq n-1$. Considérons l'unique entier q, $1 \leq q \leq g$, tel que $n_1 \ldots n_{q-1} \leq i < n_1 \ldots n_q$. Alors:*

$$\beta(i) = \mathrm{Max}\{\overline{\beta}_1 i, \overline{\beta}_2 [i/n_1], \ldots, \overline{\beta}_q [i/n_1 \ldots n_{q-1}]\}.$$

En particulier pour $i \equiv 0 \quad (n_1 \ldots n_{q-1})$ et $i < n_1 \ldots n_q$, on a:

$$\frac{\beta(i)}{i} = \frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \ldots n_{q-1}} = \frac{e_q}{m_q} + 1$$

où les (e_q, m_q) sont les invariants polaires ordonnés comme précédemment.

2) *Soit $i \geq n$. Alors:*

$$\beta(i) = \mathrm{Max}\{ni, \overline{\beta}_1 k_1(i), \overline{\beta}_2 k_2(i), \ldots, \overline{\beta}_g k_g(i), \theta(i,q), 0 \leq q \leq g\}$$

où

$$k_q(i) = \begin{cases} [i/n_1 \ldots n_{q-1}] & si\, [i/n_1 \ldots n_{q-1}] \not\equiv 0\ (n_q \ldots n_g) \\ [i/n_1 \ldots n_{q-1}] - 1 & dans\ le\ cas\ contraire \end{cases}$$

$$\theta(i,q) = \begin{cases} n \left[\frac{i}{\beta_q}\right] \left(\frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \ldots n_{q-1}} - \frac{\beta_q}{n_1 \ldots n_q} \right) + \frac{ni}{n_1 \ldots n_q} & si \left[\frac{i}{\beta_{q+1}}\right] < \left[\frac{i}{\beta_q}\right] \\ 0 & si \left[\frac{i}{\beta_{q+1}}\right] = \left[\frac{i}{\beta_q}\right] \end{cases}$$

$$(par\ convention\ \beta_{g+1} = +\infty).$$

La première assertion de 2.1.1 a été obtenue indépendamment dans [4]. Je remercie le referee de m'avoir communiquer cette référence. C. Cuesta-Sainz donne aussi un exemple où $\beta(i)$ prend toutes les valeurs dans le Max de 2.1.1.

Remarque 2.2. Soit $\nu = \mathrm{Max}(e_q/m_q) = e_g/m_g = \frac{\overline{\beta}_g}{n_1 \ldots n_{g-1}} - 1$. On peut vérifier à l'aide du calcul ci-dessus et de la définition des $\overline{\beta}_q$ que,

$$\forall i \in \mathbb{N}, \beta(i) \leq \nu i + i.$$

De plus pour $i \equiv 0\ (n_1 \ldots n_{g-1})$ et $i \not\equiv 0\ (n)$, $\beta(i) = \nu i + i$.

Exemple 2.3. Si $(C,0)$ a une seule paire de Puiseux (m,n), on a:

- Si $m \neq n+1$, $\beta(i) = mi$, si $i \not\equiv 0\ (n)$ et $\beta(i) = m(i-1)$ si $i \equiv 0\ (n)$
- Si $m = n+1$, $\beta(i) = mi$ si $i \not\equiv 0\ (n)$, $\beta(n) = n^2$, $\beta(kn) = m(kn-1)$, $k > 1$.

Corollaire 2.4. *Deux branches planes $(C,0)$ et $(C',0)$ ont même type topologique si et seulement si elles ont même multiplicité et même fonction d'Artin-Greenberg.*

Preuve. Si $(C,0)$ et $(C',0)$ ont même type topologique, elles ont même multiplicité et même fonction d'Artin-Greenberg, car celle-ci se calcule entièrement par la donnée de la caractéristique $(n, \beta_1, \ldots, \beta_g)$. Réciproquement si $(C,0)$ et $(C',0)$ ont même multiplicité et fonction d'Artin-Greenberg. On a $\beta(1) = \beta_1 = \beta'(1) = \beta'_1$. Par suite $\frac{\beta_1}{n} = \frac{\beta'_1}{n}$, et C, C' ont donc même première paire. Ensuite par $\beta(n_1) = \overline{\beta}_2 = \beta'(n_1) = \overline{\beta'}_2$, on obtient $\frac{\beta_2}{n} = \frac{\beta'_2}{n}$, d'où la coïncidence de la seconde paire. La coïncidence de la q-ième paire de $(C,0)$ et $(C',0)$ est obtenue en écrivant $\beta(n_1 \ldots n_{q-1}) = \overline{\beta}_q = \overline{\beta'}_q = \beta'(n_1 \ldots n_{q-1})$.

Remarque 2.5. En fait $(C,0)$ et $(C',0)$ ont même type topologique si et seulement si $(n, \beta(i), i < n) = (m, \beta(i), i < m)$.

Remarque 2.6. D'après un résultat de J.Pas ou de M.Presburger (cf. [5] Remarque p. 231), il existe deux entiers positifs d, N tels que, pour $i > N$, $\beta(i) = a_{\rho(i)}i + b_{\rho(i)}$, où $\rho(i)$ désigne la classe de i modulo d. Dans le cas présent on a: $\beta(i) = \overline{\beta}_g k_g(i)$ pour $i \gg 0$.

En effet pour $q < g$, $\overline{\beta}_q k_q(i) \leq \frac{\overline{\beta}_q i}{n_1 \ldots n_{q-1}} = \frac{\overline{\beta}_q n_q \ldots n_{g-1} i}{n_1 \ldots n_{g-1}}$. Mais $\overline{\beta}_q n_q \ldots n_{g-1} \leq \overline{\beta}_g - 1$. D'où $\overline{\beta}_q k_q(i) \leq \frac{\overline{\beta}_g i}{n_1 \ldots n_{g-1}} - \frac{i}{n_1 \ldots n_{g-1}}$. Or $\frac{i}{n_1 \ldots n_{g-1}} = [\frac{i}{n_1 \ldots n_{g-1}}] + \frac{r}{n_1 \ldots n_{g-1}}$, avec $0 \leq r < n_1 \ldots n_{g-1}$. Par suite pour $i \gg 0$, $\overline{\beta}_q k_q(i) \leq \overline{\beta}_g k_g(i)$. D'autre part $\theta(i,q) \leq \frac{n}{\beta_q} \frac{\overline{\beta}_q i}{n_1 \ldots n_{q-1}}$. Donc pour $q < g$ et $i \gg 0$, $\theta(i,q) \leq \overline{\beta}_g k_g(i)$. De plus $\theta(i,g) \leq \frac{n}{\beta_g} \frac{\overline{\beta}_g i}{n_1 \ldots n_{g-1}}$ et $\frac{\overline{\beta}_g i}{n_1 \ldots n_{g-1}} \simeq \overline{\beta}_g k_g(i)$. Mais $\frac{n}{\beta_g} < 1$, par suite pour $i \gg 0$ on a: $\theta(i,g) \leq \overline{\beta}_g k_g(i)$.

Maintenant $\overline{\beta}_g k_g(i)$ est du type Pas-Presburger précédemment évoqué, avec $d = n_1 \ldots n_{g-1}$. Je remercie le referee de m'avoir fait part de cette observation.

Preuve du théorème 2.1. 1) Soient $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n-1$, et $f \in \mathcal{O}_2$ un germe d'équation réduite et irréductible de $(C, 0)$. On remarque d'abord que:

$$\beta(i) = \text{Max}\left\{\text{val}\,(f \circ \varphi),\ \varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^2,0} \text{ et val}\,(\varphi) \leq i\right\}.$$

Soit donc $\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^2,0}$ avec $\text{val}\,(\varphi) \leq i$. Notons $(D, 0)$ le germe de courbe image de φ. Après un choix convenable d'une uniformisante t, on a $\varphi(t) = \varphi'(t^k)$ où $k \geq 1$ et φ' est une paramétrisation irréductible de $(D, 0)$. (Nous disons qu'une paramétrisation $t \to \varphi(t)$ d'une branche $(D, 0)$ est irréductible, s'il n'existe pas de de $l > 1$ et de $\theta \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^2,0}$ tel que $\varphi(t) = \theta(t^l)$.) On a alors:

$$\text{val}\,(f \circ \varphi) = k\text{val}\,(f \circ \varphi') = k(C, D)$$

où (C, D) est la multiplicité d'intersection à l'origine de C et D. On est donc amené à calculer les valeurs possibles de (C, D) pour $0 < m(D) < n$, où $m(D)$ désigne la multiplicité de D à l'origine. Pour cela, choisissons un système de coordonnées (x, y) à l'origine de $\mathbb{C}^2$, tel que, désignant par f et g des équations respectives de C et D, on ait f et g régulières d'ordre leur multiplicité dans la direction y. Par le théorème de préparation de Weierstrass, on peut supposer que:

$$f(x,y) = y^n + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i(x) y^{n-i},\ a_i(0) = 0,$$

$$g(x,y) = y^m + \sum_{1 \leq i \leq m} b_i(x) y^{m-i},\ b_i(0) = 0.$$

Ensuite, quitte à faire un changement de variables, $y \leftarrow y - \sum_{1 \leq j \leq d} c_j x^j$, $x \leftarrow x$, on peut toujours supposer que $y = 0$ a le contact maximal (au sens usuel) avec $(C,0)$. Considérons alors:

$$y_1(x^{\frac{1}{n}}) = \sum_{j\geq\beta_1} a_j x^{\frac{j}{n}},$$
$$y'_1(x^{\frac{1}{m}}) = \sum_{j\geq 1} b_j x^{\frac{j}{m}}$$

des développements de Puiseux racines respectivement de $f(x,y)=0$ et $g(x,y)=0$. Si ξ (resp. θ) est une racine primitive n-ième (resp. m-ième) de l'unité, on pose:

(2.1.1)
$$y_l(x^{\frac{1}{n}}) = y_1(\xi^{l-1}.x^{\frac{1}{n}}),\ y'_{l'}(x^{\frac{1}{m}}) = y'_1(\theta^{l'-1}.x^{\frac{1}{m}}), 1\leq l\leq n, 1\leq l'\leq m.$$

Par définition, on appellera ordre de coïncidence des développements de Puiseux de C et D le nombre:

$$c(D) = \mathrm{Max}\ \mathrm{ord}_x(y_l(x^{\frac{1}{n}}) - y'_{l'}(x^{\frac{1}{m}})), 1\leq l\leq n, 1\leq l'\leq m.$$

De même le nombre $\alpha(D) = nc(D)$ sera dit l'ordre de contact de C et D à l'origine (cf. [**10**] Def. 2.1 et Remarque 2.2 p. 106).

Soit alors $s = \mathrm{Max}\{k\in\{0,\ldots,g-1\}/m = m(D)\equiv 0\ (n_1\ldots n_k)\}$. L'ordre de coïncidence entre développements de Puiseux $c(D)$ est inférieur ou égal à $\frac{\beta_{s+1}}{n}$. En effet $\frac{\beta_{s+1}}{n} = \frac{r_{s+1}}{n_1\ldots n_{s+1}} \notin \frac{1}{m}\mathbb{N}$ car, $m\equiv 0\ (n_1\ldots n_s)$, $m\not\equiv 0\ (n_1\ldots n_{s+1})$, et $pgcd(n_{s+1},r_{s+1}) = 1$. Par suite $\alpha(D)\leq\beta_{s+1}$. D'autre part, on a $\alpha(D)=\beta_{s+1}$ pour les courbes $D_{d,m}$, images de $\rho_{d,m} : (\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ où:

$$\rho_{d,m}(t) = (t^m, \theta_{d,m}(t)) \text{ et } \theta_{d,m}(t) = \sum_{j<\beta_{s+1}} \xi^{dj} a_j t^{\frac{jm}{n}},\ 0\leq d<n.$$

On a bien $\theta_{d,m}(t)\in\mathbb{C}\{t\}$, car $\frac{jm}{n}\in\mathbb{N}$ si $a_j\neq 0$. En effet $m\equiv 0\ (n_1\ldots n_s)$ et, $\frac{j}{n}\in\frac{1}{n_1\ldots n_s}\mathbb{N}$, lorsque $a_j\neq 0$ et $j<\beta_{s+1}$, par définition de la caractéristique.

D'après la Proposition 2.4 p. 106 de [**10**] on a:

$$(C, D_{d,m}) = m\frac{\overline{\beta}_{s+1}}{n_1\ldots n_s}.$$

D'autre part, pour une courbe D de multiplicité $m = m(D)$, soit q l'unique entier $0\leq q\leq g$ tel que $\beta_q\leq\alpha(D)=\alpha<\beta_{q+1}$ (rappelons que $\beta_{g+1}=\infty$). On a d'après la proposition de [**10**] précitée:

$$\frac{(C,D)}{m(D)} = \frac{\overline{\beta}_q}{n_1\ldots n_{q-1}} + \frac{\alpha-\beta_q}{n_1\ldots n_q}.$$

Puisque $\alpha\leq\beta_{s+1}$, on a: $q\leq s+1\leq g$. Si $q\leq s$, on a:

$$\frac{\overline{\beta}_q}{n_1\ldots n_{q-1}} + \frac{\alpha-\beta_q}{n_1\ldots n_q} < \frac{\overline{\beta}_q}{n_1\ldots n_{q-1}} + \frac{\beta_{q+1}-\beta_q}{n_1\ldots n_q} = \frac{\overline{\beta}_{q+1}}{n_1\ldots n_q} \leq \frac{\overline{\beta}_{s+1}}{n_1\ldots n_s}.$$

Si $q = s+1$, on a $\alpha = \beta_{s+1}$, donc:

$$\frac{(C,D)}{m(D)} = \frac{\overline{\beta}_{s+1}}{n_1 \dots n_s}.$$

Au vue de ce qui précède on a donc établi:

Lemme 2.7. *Soient m un entier premier à n et $(D,0)$ un germe de branche plane de multiplicité $m(D) = m$. Soit $s = \mathrm{Max}\{k \in \{0,\dots,g-1\}/m \equiv 0\ (n_1 \dots n_k)\}$. Alors:*

$$\frac{(C,D)}{m(D)} \leq \frac{\overline{\beta}_{s+1}}{n_1 \dots n_s}.$$

De plus, il existe des courbes D de multiplicité m telles que:

$$\frac{(C,D)}{m(D)} = \frac{\overline{\beta}_{s+1}}{n_1 \dots n_s}.$$

Revenons au calcul de $\beta(i)$. Soient donc $i \leq n-1$, et q l'unique entier tel que: $1 \leq q \leq g$ et $n_1 \dots n_{q-1} \leq i < n_1 \dots n_q$. Il s'agit d'après ce qui précède de calculer $\mathrm{Max}\{k(C,D), D$ telle que $km(D) \leq i\}$.

Pour une telle courbe $s = s(D) \leq q-1$. Donc en vertu du lemme:

$$(C,D) \leq m(D) \frac{\overline{\beta}_{s(D)+1}}{n_1 \dots n_{s(D)}}.$$

Or $\frac{km(D)}{n_1 \dots n_{s(D)}} \leq \frac{i}{n_1 \dots n_{s(D)}}$.

Mais $\frac{km(D)}{n_1 \dots n_{s(D)}}$ étant un entier, on a:

$$\frac{km(D)}{n_1 \dots n_{s(D)}} \leq \left[\frac{i}{n_1 \dots n_{s(D)}}\right].$$

Par conséquent:

$$k(C,D) \leq \left[\frac{i}{n_1 \dots n_{s(D)}}\right] \overline{\beta}_{s(D)+1}.$$

D'où: $\beta(i) \leq \mathrm{Max}\{\overline{\beta}_1 i, \overline{\beta}_2 [i/n_1], \dots, \overline{\beta}_q [i/n_1 \dots n_{q-1}]\}$.

D'autre part soit p, $1 \leq p \leq q$. Posons $k_p = [i/n_1 \dots n_{p-1}]$. Il existe un arc φ_p tel que $\mathrm{val}\, \varphi_p = k_p n_1 \dots n_{p-1} \leq i$ et $\mathrm{val}\,(f \circ \varphi_p) = \overline{\beta}_p [i/n_1 \dots n_{p-1}]$. Il suffit en effet de considérer l'arc φ_p défini par:

$$\varphi_p(t) = (t^{n_1 \dots n_{p-1} k_p}, \theta_{0,n_1 \dots n_{p-1}}(t^{k_p})).$$

Alors $\mathrm{val}\,(f \circ \varphi_p) = k_p(C, D_{0,n_1 \dots n_{p-1}}) = \overline{\beta}_p [i/n_1 \dots n_{p-1}]$. D'où l'égalité annoncée dans 2.1.

Maintenant si $i \equiv 0\ (n_1 \dots n_{q-1})$ et $i < n_1 \dots n_q$, les nombres $i/n_1 \dots n_{p-1}$, $1 \leq p \leq q$, sont entiers, et donc $\beta(i) = \mathrm{Max}\{\overline{\beta}_1 i, \overline{\beta}_2 i/n_1, \dots, \overline{\beta}_q i/n_1 \dots n_{q-1}\}$.

Par conséquent $\beta(i) = \overline{\beta}_q i/n_1 \dots n_{q-1}$, car pour $p \leq p'$ on a:

$$\frac{\overline{\beta}_p}{n_1 \dots n_{p-1}} \leq \frac{\overline{\beta}_{p'}}{n_1 \dots n_{p'-1}}.$$

Ainsi $\beta(i)/i = \overline{\beta}_q/n_1 \dots n_{q-1} = e_q/m_q + 1$ d'après [**10**].

Passons maintenant au second point de 2.1. Pour cela, étant donnés $\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^2,0}$ et $i \in \mathbb{N}$, on écrira $\varphi \equiv^i \mathcal{N}_{C,0}$ si et seulement si il existe $\psi \in \mathcal{N}_{C,0}$ tel que $\mathrm{val}\,(\varphi - \psi) > i$. Si (x, y) est un système de coordonnées satisfaisant les conditions précédentes, on notera φ_1 (resp. φ_2) la composante en x (resp. en y) de φ. On a alors:

Lemme 2.8. *Soient $i \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^2,0}$ tel que $\mathrm{val}\,\varphi \leq i$, et $(D, 0)$ l'image de φ. $\varphi \equiv^i \mathcal{N}_{C,0}$ si et seulement si $\mathrm{val}\,\varphi = \mathrm{val}\,\varphi_1$, $\mathrm{val}\,\varphi$ est un multiple de n, et l'ordre de coincidence des développements de Puiseux $c(D)$ est strictement supérieur à $i/\mathrm{val}\,(\varphi)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe $\psi \in \mathcal{N}_{C,0}$ tel que $\mathrm{val}\,(\varphi - \psi) > i$. Puisque $i \geq \mathrm{val}\,(\varphi)$, φ et ψ ont même valuation et même tangente. La tangente de ψ étant $y = 0$, on a donc:

$$\mathrm{val}\,(\varphi) = \mathrm{val}\,(\varphi_1) < \mathrm{val}\,(\varphi_2) \text{ et } \mathrm{val}\,(\varphi) = \mathrm{val}\,(\psi) = np.$$

Pour un choix convenable d'une uniformisante t, on a:

$$\varphi(t) = (t^{np}, \varphi_2(t)) \text{ et } \psi(t) = (u(t)^n, y_1(u(t))) \text{ où } u \in \mathcal{O}_1.$$

Ecrivons $u(t) = v(t)^p$, où $v(t) = at + r(t)$ et $\mathrm{val}\,(r) \geq 2$. Comme $np \leq i$, on a: $a^{np} = 1$. Par suite $a^p = \xi^{k-1}$, pour un certain k, $1 \leq k \leq n$. D'autre part puisque $t^{np} - v(t)^{np} \in (t)^{i+1}$, un calcul élémentaire montre que:

$$\mathrm{val}\,(r) \geq 2 + i - np.$$

Maintenant:

$$y_1(v(t)^p) - y_1(\xi^{k-1}.t^p) = \sum_{j \geq \beta_1} a_j \sum_{1 \leq l \leq jp} \binom{jp}{l} r(t)^l (at)^{jp-l}.$$

Mais: $l\mathrm{val}\,(r) + jp - l \geq l(\mathrm{val}\,(r) - 1) + jp \geq i + 1 - np + jp \geq i + 1$. Par conséquent: $y_1(v(t)^p) - y_1(\xi^{k-1}.t^p) \in (t)^{i+1}$. Ainsi les notations étant celles de (2.1.1) on a : $\varphi_2(t) - y_k(t^p) \in (t)^{i+1}$. Ecrivons maintenant $(t^{np}, \varphi_2(t)) = (t^{ms}, \theta(t^s))$ où l'arc $(t^m, \theta(t))$ est irréductible. Puis posons:

$$\theta(t) = \sum_{j > m} b_j t^j.$$

Ainsi:

$$y_1'(x^{\frac{1}{m}}) = \sum_{j > m} b_j x^{\frac{j}{m}}$$

est un développement de Puiseux correspondant à l'image D de φ. On a:

$$\begin{aligned} c(D) \geq \operatorname{ord}_x(y_1'(x^{\frac{1}{m}}) - y_k(x^{\frac{1}{n}})) &= \frac{1}{ms}\operatorname{ord}_x(y_1'(x^s) - y_k(x^p)) \\ &= \frac{1}{ms}\operatorname{val}(\varphi_2(t) - y_k(t^p)) \geq \frac{i+1}{ms}. \end{aligned}$$

Et donc, $c(D) \geq \frac{i+1}{\operatorname{val}(\varphi)} > \frac{i}{\operatorname{val}(\varphi)}$. Réciproquement si $c(D) > \frac{i}{\operatorname{val}(\varphi)}$, on prouve de manière similaire que $\varphi \equiv^i \mathcal{N}_{C,0}$ en tenant compte du fait que:

$$c(D) = \operatorname{Max}_{1\leq l\leq n}\operatorname{ord}_x(y_1'(x^{\frac{1}{m}}) - y_l(x^{\frac{1}{n}})).$$

$\square$

Revenons au calcul de $\beta(i)$. On a par définition de la fonction d'Artin-Greenberg:

$$\begin{aligned} \beta(i) &= \operatorname{Max}\{\operatorname{val} f\circ\varphi,\ \varphi \not\equiv^i \mathcal{N}_{C,0}\} \\ &= \operatorname{Max}\{\operatorname{val} f\circ\varphi,\ \varphi \not\equiv^i \mathcal{N}_{C,0} \text{ et } \operatorname{val}(\varphi) \leq i\}. \end{aligned}$$

Pour un φ tel que $\operatorname{val}(\varphi) \leq i$ et $\varphi \not\equiv^i \mathcal{N}_{C,0}$, trois cas peuvent se produire en vertu du lemme.

$\underline{1^{ier}cas}$: $\operatorname{val}(\varphi) < \operatorname{val}(\varphi_1)$.
On a alors: $\operatorname{val}(f\circ\varphi) \leq n\operatorname{val}(\varphi) \leq ni$. De plus l'égalité est obtenue pour l'arc $t \to (0, t^i)$.

$\underline{2^{ieme}cas}$: $\operatorname{val}(\varphi) = \operatorname{val}(\varphi_1)$ et $\operatorname{val}(\varphi_1)$ n'est pas un multiple de n.
Ecrivons $\varphi(t) = (t^{mp}, \theta(t^p))$ où l'arc $(t^m, \theta(t))$ est irréductible. Soit $s = \operatorname{Max}\{k \in \{0,\dots g-1\}/\ m \equiv 0\ (n_1\dots n_k)\}$. En vertu du Lemme 2.7, $\operatorname{val}(f\circ\varphi) \leq mp\frac{\overline{\beta}_{s+1}}{n_1\dots n_s}$. Mais par définition $k_{s+1}(i)$ est le plus grand entier l tel que: $n_1\dots n_s l \leq i$ et $n_1\dots n_s l \not\equiv 0\ (n)$. Par suite $mp = n_1\dots n_s l$, avec $l \leq k_{s+1}(i)$, et donc $\operatorname{val}(f\circ\varphi) \leq l\overline{\beta}_{s+1} \leq k_{s+1}(i)\overline{\beta}_{s+1}$. De plus l'égalité est obtenue pour l'arc $t \to \rho_{0,n_1\dots n_s}(t^{k_{s+1}(i)})$ qui a été défini au cours de la preuve du Lemme 2.7.

$\underline{3^{ieme}cas}$: $\operatorname{val}(\varphi) = \operatorname{val}(\varphi_1)$ et $\operatorname{val}(\varphi_1)$ est un multiple de n.
Posons $\varphi(t) = (t^{np}, \varphi_2(t)) = (t^{mk}, \theta(t^k))$, où l'arc $(t^m, \theta(t))$ est irréductible. Puis considérons l'unique entier q tel que: $q \in \{0,\dots,g\}$ et $\beta_q \leq \frac{i}{p} < \beta_{q+1}$. On a donc:

$$\frac{i}{\beta_{q+1}} < p \leq \frac{i}{\beta_q},\ \text{i.e.,}\ \left[\frac{i}{\beta_{q+1}}\right] + 1 \leq p \leq \left[\frac{i}{\beta_q}\right].$$

Soit maintenant $\alpha(D) = nc(D)$, l'ordre de contact entre C et l'image D de φ. On a d'après [**10**] Proposition 2.4:

$$\operatorname{val}(f \circ \varphi) = km \left(\frac{\overline{\beta}_{q'}}{n_1 \dots n_{q'-1}} + \frac{\alpha - \beta q'}{n_1 \dots n_{q'}} \right)$$

où q' est l'unique entier tel que: $0 \leq q' \leq g$ et $\beta_{q'} \leq \alpha < \beta_{q'+1}$. En vertu du Lemme 2.8, $\alpha = nc(D) \leq \frac{ni}{\operatorname{val}(\varphi)} = \frac{i}{p}$. Par suite $q' \leq q$. Si $q' < q$, on a:

$$\begin{aligned} \operatorname{val}(f \circ \varphi) &= np \left(\frac{\overline{\beta}_{q'}}{n_1 \dots n_{q'-1}} + \frac{\alpha - \beta q'}{n_1 \dots n_{q'}} \right) \\ &\leq np \left(\frac{\overline{\beta}_{q'}}{n_1 \dots n_{q'-1}} + \frac{\beta_{q'+1} - \beta q'}{n_1 \dots n_{q'}} \right). \end{aligned}$$

Mais le dernier terme de l'inégalité ci-dessus vaut:

$$np \frac{\overline{\beta}_{q'+1}}{n_1 \dots n_{q'}}.$$

Donc pour $q' < q$, on a:

$$\begin{aligned} \operatorname{val}(f \circ \varphi) \leq np \frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \dots n_{q-1}} &\leq n \left[\frac{i}{\beta_q} \right] \frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \dots n_{q-1}} \\ &\leq n \left[\frac{i}{\beta_q} \right] \left(\frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \dots n_{q-1}} + \frac{\frac{i}{[\frac{i}{\beta_q}]} - \beta_q}{n_1 \dots n_q} \right) = \theta(i, q). \end{aligned}$$

Si $q' = q$. Puisque $\alpha \leq \frac{i}{p}$, on a:

$$\begin{aligned} \operatorname{val}(f \circ \varphi) &= np \left(\frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \dots n_{q-1}} + \frac{\alpha - \beta_q}{n_1 \dots n_q} \right) \\ &\leq np \left(\frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \dots n_{q-1}} + \frac{i/p - \beta_q}{n_1 \dots n_q} \right). \end{aligned}$$

Comme $\overline{\beta}_q - \frac{\beta_q}{n_q} \geq 0$, le dernier terme de l'inégalité ci-dessus est une fonction croissante de p. Mais $p \leq [\frac{i}{\beta_q}]$, donc:

$$\operatorname{val}(f \circ \varphi) \leq n \left[\frac{i}{\beta_q} \right] \left(\frac{\overline{\beta}_q}{n_1 \dots n_{q-1}} - \frac{\beta_q}{n_1 \dots n_q} \right) + \frac{ni}{n_1 \dots n_q} = \theta(i, q).$$

Pour conclure, il nous reste à voir qu'il existe $\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^2,0}$, $\varphi \not\equiv^i \mathcal{N}_{C,0}$ tel que $\operatorname{val}(\varphi) \leq i$ et $\operatorname{val}(f \circ \varphi) = \theta(i, q)$. Pour cela posons $p = [\frac{i}{\beta_q}]$, il revient au même de voir qu'il existe φ tel que, $\operatorname{val}(\varphi) = np$, et l'ordre de coïncidence entre les développements de Puiseux de C et de l'image D de φ soit égal exactement à $\frac{i}{np}$. Considèrons $\varphi(t) = (t^{np}, \theta(t))$, où:

$$\theta(t) = \sum_{j \geq \beta_1,\, pj < i} a_j t^{pj} + rt^i.$$

Avec:

- si i non multiple de p, $r \neq 0$,
- si $i = lp$, $r \neq a_l \xi^{kl} \eta^d$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq d \leq np$, où ξ (resp. η) est une racine primitive n-ième (resp. np-ième) de l'unité.

Ecrivons: $\varphi(t) = (t^{ms}, \rho(t^s))$, où l'arc $(t^m, \rho(t))$ est irréductible. Alors:

$$y_1'(x^{\frac{1}{m}}) = \sum_{j \geq \beta_1,\, pj < i} a_j x^{\frac{j}{n}} + rx^{\frac{i}{np}}$$

est un développement de Puiseux racine correspondant à D. Or par constuction:

$$ord_x(y_1'(x^{\frac{1}{m}}) - y_1(x^{\frac{1}{n}})) = \frac{i}{np}$$

$$ord_x(y_{k'}'(x^{\frac{1}{m}}) - y_k(x^{\frac{1}{n}})) \leq \frac{i}{np}, 1 \leq k \leq n, 1 \leq k' \leq m.$$

D'où $c(D) = \frac{i}{np}$, comme annoncé.

References

[1] S.S. Abhyankar, *Expansion Techniques in Algebraic Geometry*, Lecture Notes of the Tata Institute Bombay, **57**, 1977, MR 80m:14016, Zbl 0818.14001.

[2] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Inst. Hautes Etudes Sci. Pub. Math., **36** (1969), 23-58, MR 42 #3087, Zbl 0181.48802.

[3] E. Bierstone and P.D. Milman, *Canonical desingularisation in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Invent. Math., **128** (1997), 207-302, MR 98e:14010, Zbl 0896.14006.

[4] C. Cuesta-Sainz, *Funcion de Artin para Germenes Irreducibles de Curvas Planas*, Tesis de Tercer Ciclo, Universidad de Valladollid, Departemento de Algebra y Geometria, 1999.

[5] J. Denef and F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math., **135** (1999), 201-232, MR 99k:14002, Zbl 0928.14004.

[6] A. El Khadiri and J.C. Tougeron, *Familles Noetheriennes de modules sur $k[[X]]$ et applications*, Bull. Sci. Math., **120** (1996), 253-292, MR 97g:13028, Zbl 0858.13009.

[7] M. Greenberg, *Rational points in Henselian discrete valuation rings*, Inst. Hautes Etudes Sci. Pub. Math., **31** (1966), 59-64, MR 34 #7515, Zbl 0146.42201.

[8] M. Hickel, *Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique*, Amer. J. Math., **115** (1993), 1299-1334, MR 95c:32006, Zbl 0804.32006.

[9] M. Lejeune-Jalabert, *Courbes tracées sur un germe d'hypersurface*, Amer. J. Math., **112** (1990), 525-568, MR 92a:14002, Zbl 0743.14002.

[10] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Invent. Math., **41** (1977), 103-111, MR 57 #330, Zbl 0371.14003.

[11] M. Spivakovsky, *Valuations in function fields of surfaces*, Amer. J. Math., **112** (1990), 107-156, MR 91c:14037, Zbl 0716.13003.

[12] B.Teissier, *Variétés polaires* I, Invent. Math., **40** (1977), 267-292, MR 57 #10004, Zbl 0446.32002.

[13] O. Villamayor, *Constructiveness of Hironaka's resolution*, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. (4^e série), **22** (1989), 1-32, MR 90b:14014, Zbl 0675.14003.

[14] ———, *Patching local uniformizations*, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. (4^e série), **25** (1992), 629-677.

[15] O. Zariski, *Le Problème des Modules pour les Branches Planes*, Hermann, 1986, MR 88a:14031, Zbl 0592.14010.

Received April 3, 2002 and revised February 12, 2003.

Université Bordeaux I
Laboratoire d'Analyse et Géométrie
F-33405 Talence cedex
France
E-mail address: hickel@math.u-bordeaux.fr