Pacific Journal of Mathematics

CONFLUENCE q-DIFFÉRENCE VERS DIFFÉRENCE POUR UN SYSTÈME FUCHSIEN

ANNE DUVAL

Volume 217 No. 2 December 2004

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 217, No. 2, 2004

CONFLUENCE q-DIFFÉRENCE VERS DIFFÉRENCE POUR UN SYSTÈME FUCHSIEN

Anne Duval

In a previous article we showed how one can see the classical result on existence and uniqueness of a fundamental set of factorial series solutions of a regular difference system as the limit, when q tends to 1, of analogous results for a q-difference system obtained by some kind of deformation. We extend here this property to singular-regular (or Fuchsian) systems.

Introduction

Il est bien connu qu'une équation aux q-différences (*resp.* aux différences de pas ε) dégénère en une équation différentielle lorsque $q \to 1$ (*resp.* $\varepsilon \to 0$) et que ce phénomène se traduit au niveau des solutions. Cette confluence, étudiée de longue date, a été reprise récemment dans le cas des q-différences par J. Sauloy qui en propose une théorie précise et complète dans [**7**]. L'étude parallèle du cas différence n'est pas faite et semble plus difficile. C'est un autre type, probablement plus abordable, de confluence que nous envisageons ici, la dégénérescence d'une équation aux q-différences en une équation aux différences. Il s'agit dans les deux cas d'une équation fonctionnelle construite à partir d'une homographie, à deux points fixes dans le premier cas, un seul dans le second cas. Dans [**1**] nous abordions, dans l'esprit de [**7**], le cas *régulier*. Nous y montrions comment on peut voir le classique théorème d'existence et d'unicité d'un système fondamental de solutions développables en séries de factorielles convergentes et à valeur prescrite en $+\infty$ comme limite, lorsque le paramètre *réel* q tend vers 1^+, de résultats analogues pour un système aux q-différences qui en est une déformation convenable. Nous étudions ici le cas d'un système aux différences singulier-régulier (ou fuchsien) au sens de [**3**] ou [**6**]. Nous utilisons en particulier une famille de "caractères" inspirée de celle qu'utilise J. Sauloy ([**7**]) dans le cas q-différence.

Indiquons le plan de l'article. Dans un premier paragraphe, nous rappelons ce qu'on entend par système aux différences fuchsien puis indiquons comment le déformer en un système aux q-différences également fuchsien. Le deuxième paragraphe est consacré au cas d'un système à coefficients constants. On y définit en particulier une famille de *caractères méromorphes* dans $\mathbf{C}$. Le dernier paragraphe montre enfin comment modifier et utiliser les résultats de [**1**] pour ramener le cas fuchsien au cas constant.

1. Le cadre de l'étude

A l'homothétie $\sigma_q(x) = qx$ est associé l'opérateur aux q-différences $\sigma_q(f)(x) = f(qx)$. Si on remplace σ_q par l'homographie $\sigma_{q,1}(x) = qx+1$ puis que l'on fait tendre q vers 1, on obtient la translation de pas 1, $\tau f(x) = f(x+1)$.

L'homographie $\sigma_{q,1}$ a, comme σ_q, deux points fixes et une équation fonctionnelle faisant intervenir $\sigma_{q,1}$ peut être transformée en une équation aux q-différences par un changement homographique de la variable. L'un des deux points fixes de $\sigma_{q,1}$ est situé en $1/(1-q)$ et conflue, lorsque $q \to 1$, vers l'autre, situé en ∞.

On peut alors étudier les solutions d'un système aux différences linéaire

$$X(x+1) = A(x)X(x) \tag{$*$}$$

où $A(x)$ est une matrice carrée de dimension μ et X un vecteur de dimension μ, à partir de celles d'une déformation

$$X(qx+1) = A_q(x)X(x). \tag{$*$}_q$$

La forme de $A_q(x)$, vérifiant $\lim_{q\to 1} A_q(x) = A(x)$, est précisée au paragraphe 1.2, après un paragraphe de rappels concernant les systèmes aux différences singuliers réguliers (ou fuchsiens) en $+\infty$.

1.1. Système aux différences fuchsien en $+\infty$. La terminologie choisie est inspirée de celle du cas différentiel. Le parallélisme entre les deux théories est frappant si l'on utilise l'opérateur $(x-1) \underset{-1}{\Delta}$ où

$$\underset{-1}{\Delta} f(x) = f(x) - f(x-1)$$

et les *séries de factorielles* dont nous rappelons la définition.

On choisit une norme sur $\mathbf{C}^\mu$ et une norme compatible sur $gl(\mu, \mathbf{C})$, c'est-à-dire que l'on impose, pour $A \in gl(\mu, \mathbf{C})$ et $U \in \mathbf{C}^\mu$, la condition $\|AU\| \leq \|A\|\,\|U\|$.

Définition 1.1. Pour tout entier $s \geq 0$, on pose

$$x^{-[s]} = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+s-1)} & \text{si } s \geq 1 \\ 1 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Soit $A(x) = \sum_{s\geq 0} A_s x^{-[s]}$ où $A_s \in gl(\mu, \mathbf{C})$ (*resp.* $A_s \in \mathbf{C}^\mu$) une série de factorielles (formelle). Si $C > 0$ et $\lambda > 0$ sont fixés, on dit que la matrice (*resp.* le vecteur) $A(x)$ vérifie la condition (C, λ) lorsque pour tout $s \geq 1$, on a $\|A_s\| \leq C \dfrac{\Gamma(\lambda + s - 1)}{\Gamma(\lambda)}$.

La condition (C, λ) assure la convergence (absolue) de la série $A(x)$ dans le demi-plan $\Re x > \lambda$. Sa somme est alors une fonction holomorphe dans le demi-plan de convergence. Toute fonction holomorphe à l'infini admet un développement en série de factorielles convergente dans un demi-plan $\Re x \gg 0$, mais la réciproque est fausse.

Définition 1.2. Le système $(*)$ est dit "de première espèce" s'il s'écrit

$$(\star) \qquad (x{-}1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = A(x)X(x).$$

où $A(x)$ vérifie une condition (C, λ).

Le résultat suivant est classique ([**6**] ou [**3**]).

Proposition 1.3. *Un système de première espèce admet un système fondamental de solutions de la forme* $\mathcal{X}(x) = \mathcal{F}(x)x^R$ *où* R *est une matrice constante,* $\mathcal{F}(x) = \sum_{s\geq 0} F_s x^{-[s]}$ *vérifie une condition* $(\widetilde{C}, \widetilde{\lambda})$ *et* F_0 *est inversible.*

Comme dans le cas différentiel, un système $(\star)$ peut avoir un système fondamental de solutions de la forme précédente sans être de première espèce. On dit alors que $(\star)$ est *fuchsien* en $+\infty$.

Notons $gl(\mu, \mathcal{K}_f)$ l'anneau des matrices qui s'écrivent $A(x) = A_1(x) + A_2(x)$ où $A_2(x)$ vérifie une condition (C, λ) et $A_1(x)$ est un polynôme sans terme constant, à coefficients dans $gl(\mu, \mathbf{C})$. On note $\mathrm{GL}(\mu, \mathcal{K}_f)$ le groupe des éléments inversibles de $gl(\mu, \mathcal{K}_f)$.

Définition 1.4. Soit $A(x) \in gl(\mu, \mathcal{K}_f)$ et $T(x) \in \mathrm{GL}(\mu, \mathcal{K}_f)$. On définit

$$A^T(x) = T(x-1)^{-1}\big(A(x)T(x) - (x{-}1) \underset{-1}{\Delta} T(x)\big).$$

Les systèmes de matrice $A(x)$ et $B(x)$ sont dits $\mathcal{K}_f$-équivalents s'il existe $T(x) \in \mathrm{GL}(\mu, \mathcal{K}_f)$ telle que $B(x) = A^T(x)$.

Cette définition traduit le fait que $X(x) = T(x)Y(x)$ est une solution du système $(\star)$ de matrice $A(x)$ si et seulement si $Y(x)$ est une solution du système $(\star)$ de matrice $A^T(x)$.

On vérifie que, si $T_1, T_2 \in \mathrm{GL}(\mu, \mathcal{K}_f)$, $A^{T_1T_2}(x) = \big(A^{T_1}\big)^{T_2}(x)$ et que, si $T \in \mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$, alors $A^T(x) = T^{-1}A(x)T$.

Toujours de façon parallèle au cas différentiel, le résultat classique qui suit ([**6**]) montre qu'il suffit d'étudier le cas d'un système de première espèce.

Proposition 1.5. *Le système* $(\star)$ *est fuchsien en* $+\infty$ *si et seulement s'il est* $\mathcal{K}_f$*-équivalent à un système de première espèce.*

Le système fondamental de solutions indiqué dans la proposition 1.3 fait intervenir à côté des séries de factorielles les mêmes "caractères", x^λ et $\ln x$, que ceux que l'on utilise dans le cas différentiel. Pour un opérateur aux

q-différences J. Sauloy a remarqué qu'il était possible d'utiliser des fonctions *méromorphes* dans $\mathbf{C}^*$, donc sans monodromie. Nous reprenons cette idée pour les équations aux différences et indiquons au paragraphe 2 comment résoudre un système $(\star)$ de matrice *constante* en utilisant des fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}$, définies à partir de la fonction Γ et qui sont limites lorsque $q \to 1$ de celles utilisées dans [**7**].

1.2. Choix de la q-déformation. Le cas *régulier* correspond à un sytème de première espèce pour lequel $A_0 = 0$. Ce cas est étudié en [**1**] en supposant que q est un *réel* > 1. Le choix de q réel est probablement technique mais c'est seulement sous cette hypothèse que nous avons obtenu les résultats que nous réutiliserons ici. C'est pourquoi dans toute la suite on suppose $q > 1$ et on pose $p = 1/q$.

Guidé par le cas régulier, lui-même inspiré de la confluence de

$$\delta_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

vers df/dx quand $q \to 1$, on déforme $(\star)$ en un système de l'un des deux types suivants.

• Dans le plan des x, on considère un système

$$(\star)_q \qquad p(x-1)\frac{X(px-p) - X(x)}{(p-1)x - p} = A_q(x)X(x)$$

où $A_q(x)$ est une série de *factorielles mixtes*, c'est-à-dire une série

$$A_q(x) = \sum_{s\geq 0} A_s(q) e_s^{(q)}(x)$$

avec $A_s(q) \in gl(\mu, \mathbf{C})$, $e_0^{(q)}(x) = 1$ et, si $s \geq 1$,

$$e_s^{(q)}(x) = \frac{1}{x(qx+1)(q^2x+[2]_q)\cdots(q^{s-1}x+[s-1]_q)}.$$

Dans cette formule, on a utilisé la notation de Jackson

$$[z]_q = \frac{q^z - 1}{q-1}.$$

Une condition suffisante de convergence est (voir [**1**]) l'existence de $M > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $s \geq 0$, $\|A_s(q)\| \leq M/e_s^{(q)}(\lambda)$. La série converge alors dans le domaine

$$\left| x - \frac{1}{1-q} \right| > \lambda - \frac{1}{1-q}.$$

Remarquons que l'homographie $\sigma_{p,-p}(x) = px - p$ qui intervient dans $(\star)_q$ est l'inverse de $\sigma_{q,1}$.

• Dans le plan des t défini par le changement de variable (homographique) $x = (t-1)/(q-1)$, ce qui revient à normaliser l'homographie $\sigma_{q,1}$ en σ_q, le système $(\star)_q$ se transcrit en

$$(\widetilde{\star})_q \qquad (pt-1)\delta_p Y(t) = \widetilde{A}_q(t)Y(t)$$

si on a posé $Y(t) = X\left(\dfrac{t-1}{q-1}\right)$.

Cette fois $\widetilde{A}_q(t)$ est une série de *q-factorielles*, c'est-à-dire une série

$$\widetilde{A}_q(t) = \sum_{s\geq 0} \frac{\widetilde{A}_s(q)}{(t;q)_s}$$

avec $(t;q)_0 = 1$ et, pour $s \geq 1$,

$$(t;q)_s = (1-t)(1-qt)\cdots(1-q^{s-1}t).$$

Les séries de q-factorielles sont étudiées dans [**1**] où il est constaté qu'elles sont une autre façon d'écrire les séries convergentes à l'infini. La confluence s'obtient en faisant le changement de variable $t = q^u$ de sorte que $x = [u]_q$ et que l'application définissant le changement de variable du plan des x vers celui des u tend vers l'identité.

2. Système constant

On étudie dans ce paragraphe le cas du système

$$(\star) \qquad (x-1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = A\,X(x)$$

où $A \in gl(\mu, \mathbf{C})$, que l'on déforme, selon la première possibilité, en

$$(\star)_q \qquad p(x-1)\frac{X(px-p)-X(x)}{(p-1)x-p} = A(q)\,X(x)$$

où $A(q) \in gl(\mu, \mathbf{C})$ sera précisée ci-dessous et vérifiera $\lim_{q\to 1} A(q) = A$.

On peut aussi écrire l'équation $(\star)_q$ sous la forme

$$(*)_q \qquad X(x) = \Big(B(q) - \frac{1}{x}\,A(q)\Big)X(qx+1)$$

avec $B(q) = I_\mu - (q-1)A(q)$ qui est une matrice inversible si q est assez proche de 1.

On traitera successivement le cas où la matrice A est semi-simple, le cas où elle possède un seul bloc de Jordan et enfin le cas général.

2.1. Cas semi-simple. Remarquons d'abord que, lorsque $\mu = 1$, l'équation $(\star)$ est l'*équation des caractères* :

$$(x-1) \underset{-1}{\Delta} f(x) = \alpha f(x)$$

où $\alpha \in \mathbf{C}$. Le cas où α est entier est étudié dans [**1**]. On la déforme en $(\star)_q$ avec $A(q) = -[-\alpha]_q$. On est ainsi conduit à utiliser la déformation suivante d'une matrice semi-simple.

Définition 2.1. Soit $A \in gl(\mu, \mathbf{C})$ une matrice semi-simple. On note $S \in \mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_\mu$ des nombres complexes non nécessairement distincts tels que $A = S^{-1} \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_\mu) S$.

Pour $q \neq 1$, soit $S(q) \in \mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$ telle que $\lim_{q\to 1} S(q) = S$. On appelle système q-déformé du système $(\star)$ le système $(\star)_q$ de matrice

$$A(q) = S(q)^{-1} \operatorname{diag}\left(-[-\alpha_1]_q, \cdots, -[-\alpha_\mu]_q\right) S(q).$$

La matrice $B(q)$ intervenant dans la forme $(*)_q$ est alors

$$B(q) = S(q)^{-1} \operatorname{diag}\left(q^{-\alpha_1}, \cdots, q^{-\alpha_\mu}\right) S(q)$$

qui est inversible pour tout q assez proche de 1.

Avant d'étudier le système $(\star)_q$, nous commençons par quelques rappels classiques ou tirés de [**7**].

Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Une fonction $z(x)$ est solution de l'équation

$$\left(1 - \frac{[\alpha]_q}{x}\right) z(qx+1) = q^\alpha z(x)$$

si et seulement si la fonction $g(t) = z(\frac{t-1}{q-1})$ vérifie

$$(\diamond) \qquad (t - q^\alpha) g(qt) = q^\alpha (t-1) g(t).$$

Puisque $\lim_{t\to 0} q^\alpha(t-1)/(t-q^\alpha) = 1$, le point 0 est un point régulier pour l'équation $(\diamond)$ qui admet la solution *méromorphe* sur $\mathbf{C}$:

$$g_\alpha(t) = \frac{(pt;p)_\infty}{(p^{\alpha+1}t;p)_\infty}$$

où $(\xi;p)_\infty = \displaystyle\prod_{k=0}^{\infty} (1 - p^k \xi)$ pour $\xi \in \mathbf{C}$.

Rappelons que la fonction entière $(\xi;p)_\infty$ vérifie la relation fonctionnelle

$$(q\xi;p)_\infty = (1 - q\xi)(\xi;p)_\infty$$

et s'annule aux points $\xi = q^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Si $\alpha \notin \mathbf{Z}$, la fonction $g_\alpha(t)$ a des pôles simples aux points $t = q^{n+\alpha}$, $n \in \mathbf{N}^*$ et des zéros simples aux points $t = q^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Si α est un entier positif, g_α est le polynôme $(1-pt)(1-p^2t)\cdots(1-p^\alpha t)$ et si α est un entier négatif ou nul, $g_\alpha(t) = 1/(t;q)_{-\alpha}$.

On peut aussi étudier ($\diamond$) en considérant le point ∞ qui est singulier régulier puisque $\lim_{t\to\infty} q^\alpha(t-1)/(t-q^\alpha) = q^\alpha \in \mathbf{C}^*$.

Suivant [**7**], la solution méromorphe dans $\mathbf{C}^*$, obtenue “en partant de l'infini”, est $g_\alpha(t)p(t)$ où ([**7**] p. 1060)

$$p(t) = e_{q^{-\alpha}}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{q^\alpha\Theta_q(q^{-\alpha}t)}{\Theta_q(t)}$$

où Θ_q est la fonction de Jacobi définie par

$$\Theta_q(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}}t^n$$

et où, pour $c \in \mathbf{C}^*$, $e_c(t) = \dfrac{\Theta_q(t)}{\Theta_q(c^{-1}t)}$.

La fonction de Jacobi vérifie $\Theta_q\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\dfrac{1}{t}\Theta_q(t)$ et donc

$$p(t) = \frac{q^\alpha\Theta_q\left(\frac{1}{t}\right)\Theta_q(q^{-\alpha}t)}{\Theta_q(t)\Theta_q\left(\frac{q^\alpha}{t}\right)} = \frac{q^\alpha(-\frac{1}{t})}{(-\frac{q^\alpha}{t})} = 1.$$

Autrement dit $g_\alpha(t)$ est aussi la solution obtenue à partir du point ∞.

En posant $t = q^u$, et donc $x = [u]_q$, on a

$$g_\alpha(q^u) = (1-p)^\alpha\frac{\Gamma_p(1+\alpha_j-u)}{\Gamma_p(1-u)}$$

où Γ_p est la fonction gamma p-analogue de Jackson ([**5**] par exemple).

Lemme 2.2. *Soit $\alpha \in \mathbf{C}$, q un réel > 1 et $p = \dfrac{1}{q}$. On pose*

$$f_\alpha(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-x)}{\Gamma(1-x)}$$

et

$$z_\alpha^{(q)}(x) = (1-p)^{-\alpha}\frac{\big((1-p)x+p;p\big)_\infty}{\big(p^\alpha((1-p)x+p);p\big)_\infty}.$$

Ces fonctions sont méromorphes sur $\mathbf{C}$ *et vérifient*

$$f_\alpha(x) = \left(1-\frac{\alpha}{x}\right)f_\alpha(x+1),$$
$$z_\alpha^{(q)}(x) = \left(q^{-\alpha}+\frac{[-\alpha]_q}{x}\right)z_\alpha^{(q)}(qx+1).$$

Uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}\setminus\{$*pôles de* $f_\alpha\}$, *on a*

$$\lim_{q\to1^+} z_\alpha^{(q)}(x) = f_\alpha(x).$$

Preuve. On sait ([**5**]) que lorsque $p \to 1^-$, la fonction Γ_p tend vers la fonction Γ, uniformément sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus -\mathbf{N}$. Or

$$z_\alpha^{(q)}(x) = (1-p)^{-\alpha}\, g_\alpha\big((q-1)x+1\big)$$

et le facteur de normalisation est choisi pour que la limite existe. Les autres affirmations sont claires. □

Remarquons que, si $\alpha \notin \mathbf{Z}$, f_α a des pôles simples aux points $x \in \alpha + \mathbf{N}^*$ et des zéros aux points $x \in \mathbf{N}^*$. Si α est un entier > 0, f_α est le polynôme $(1-x)(2-x)\cdots(\alpha-x)$ et si α est un entier négatif ou nul, $f_\alpha(x) = x^{-[-\alpha]}$.

Avec les notations de la définition 2.1 et en remarquant que, si $X(x)$ est solution de $(\star)_q$ et donc de $(*)_q$, la j-ième composante du vecteur $Z(x) = S(q)X(x)$ vérifie l'équation

$$\Big(1 - \frac{1}{x}[\alpha_j]_q\Big) z(qx+1) = q^{\alpha_j} z(x)$$

à laquelle on applique le lemme 2.2, on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.3. *Soit $A \in gl(\mu, \mathbf{C})$ une matrice semi-simple et $(\star)_q$ un sytème q-déformé du système $(\star)$ de matrice A. Avec les notations du lemme* 2.2*, la matrice*

$$\mathcal{E}^{(q)}(x) = S(q)^{-1}\operatorname{diag}\big(z_{\alpha_1}^{(q)}(x), \cdots, z_{\alpha_\mu}^{(q)}(x)\big)$$

est méromorphe dans $\mathbf{C}$, à pôles simples appartenant à $\bigcup_{j=1}^{\mu}[\alpha_j + \mathbf{N}^*]_q$. Elle constitue une matrice fondamentale de solutions de $(\star)_q$.

Lorsque $q \to 1^+$, $\mathcal{E}^{(q)}(x)$ converge, uniformément sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{\mu}(\alpha_j + \mathbf{N}^*)$, vers la matrice

$$\mathcal{E}(x) = S^{-1}\operatorname{diag}\big(f_{\alpha_1}(x), \cdots, f_{\alpha_\mu}(x)\big)$$

qui est une matrice fondamentale de solutions du système $(\star)$, constituée de fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}$, à pôles simples appartenant à $\bigcup_{j=1}^{\mu}(\alpha_j + \mathbf{N}^*)$. Si $\alpha_j \in \mathbf{Z}$, la demi-ligne de pôles correspondante est absente si $\alpha_j \geq 0$ et remplacée par un ensemble fini de $-\alpha_j$ points si $\alpha_j < 0$.

2.2. Cas d'un seul bloc de Jordan. On suppose maintenant que $\mu \geq 2$ et $A = \alpha I_\mu + N_\mu$ où I_μ est la matrice identité et N_μ la matrice nilpotente :

$$N_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que pour tout entier k, $N_\mu^k = 0$ si et seulement si $k \geq \mu$.

Pour obtenir un système fondamental de solutions du système

$$(x-1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = (\alpha I_\mu + N_\mu) X(x)$$

on utilise des "logarithmes" associés à la famille $f_\alpha(x)$ de caractères définie au paragraphe précédent. Il s'agit ([**2**]) de la suite de fonctions définie pour $k \in \mathbf{N}$ par

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k!}\frac{\Gamma^{(k)}}{\Gamma}(1-x)$$

où $\Gamma^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction Γ. Cette suite de fonctions vérifie $\psi_0(x) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$(x-1) \underset{-1}{\Delta} \psi_k(x) = \psi_{k-1}(x).$$

Une translation de la variable conduit au lemme suivant.

Lemme 2.4. *Pour $\alpha \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$, posons $\psi_{k,\alpha}(x) = \psi_k(x-\alpha)$. Alors, pour tout $k \geq 1$,*

$$\psi_{k,\alpha}(x+1) - \psi_{k,\alpha}(x) = \frac{1}{x-\alpha}\psi_{k-1,\alpha}(x+1)$$

et la matrice

$$\mathcal{L}_{\mu,\alpha}(x) = f_\alpha(x)\begin{pmatrix} 1 & \psi_{1,\alpha}(x) & \psi_{2,\alpha}(x) & \cdots & \psi_{\mu-1,\alpha}(x) \\ 0 & 1 & \psi_{1,\alpha}(x) & \cdots & \psi_{\mu-2,\alpha}(x) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \psi_{1,\alpha}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un système fondamental de solutions du système

$$(x-1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = (\alpha I_\mu + N_\mu)X(x).$$

On déforme A en $A(q) = -[-\alpha]_q I_\mu + \varphi_\alpha(q)N_\mu$ où $\lim\limits_{q\to 1^+} \varphi_\alpha(q) = 1$. Le vecteur $V(x)$ défini par l'égalité $X(x) = z_\alpha^{(q)}(x)V(x)$ vérifie l'équation

$$V(x) = \left(I_\mu - \frac{(q-1)\varphi_\alpha(q)\big((q-1)x+1\big)}{q^{-\alpha}\big((q-1)x+1\big)-1}N_\mu\right)V(qx+1).$$

En choisissant $\varphi_\alpha(q) = q^{-\alpha}\ln q/(q-1)$ et en posant $x = [u]_q$ et $G(u) = V([u]_q)$, on obtient l'équation

$$G(u) = \left(I_\mu - \frac{\ln q}{1-q^{\alpha-u}}N_\mu\right)G(u+1).$$

Or, on a le résultat suivant ([**2**]).

Lemme 2.5. *La suite de fonctions définie pour $k \in \mathbf{N}$ par*

$$L_k(u) = \frac{(-1)^k \ln^k q}{k!\,\Gamma_p(1-u)}\left(\frac{d^k}{dc^k}\Gamma_p\Big(1-u-\frac{\ln c}{\ln q}\Big)\right)_{|c=1}$$

vérifie $L_0(u) = 1$ *et pour* $k \in \mathbf{N}^*$,

$$L_k(u+1) - L_k(u) = \frac{\ln q}{1 - q^{-u}} L_{k-1}(u+1).$$

Preuve. La famille de fonctions définie pour c voisin de 1 par

$$g_c(u) = \frac{\Gamma_p\big(1 - u - \frac{\ln c}{\ln q}\big)}{\Gamma_p(1-u)}$$

vérifie $g_1(u) = 1$ et

$$(cq^u - 1) g_c(u+1) = (q^u - 1) g_c(u)$$

qui traduit la relation fonctionnelle de la fonction Γ_p. En dérivant k fois cette relation par rapport à c puis en donnant à c la valeur 1, on obtient le résultat annoncé. □

On déduit de ce lemme le résultat suivant.

Proposition 2.6. *Posons*

$$u_q(x) = \frac{\ln\big(1 + (q-1)x\big)}{\ln q} \quad \text{et} \quad \ell^{(q)}_{k,\alpha}(x) = L_k\big(u_q(x) - \alpha\big).$$

La matrice

$$\mathcal{L}^{(q)}_{\mu,\alpha}(x) = z^{(q)}_\alpha(x) \begin{pmatrix} 1 & \ell^{(q)}_{1,\alpha}(x) & \ell^{(q)}_{2,\alpha}(x) & \cdots & \ell^{(q)}_{\mu-1,\alpha}(x) \\ 0 & 1 & \ell^{(q)}_{1,\alpha}(x) & \cdots & \ell^{(q)}_{\mu-2,\alpha}(x) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \ell^{(q)}_{1,\alpha}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

constitue un système fondamental de solutions du système

$$p(x-1)\frac{X(px-p) - X(x)}{(p-1)x - p} = \Big(-[-\alpha]_q I_\mu + q^{-\alpha}\frac{\ln q}{q-1} N_\mu\Big) X(x)$$

Ajoutons que pour tout compact K de $\mathbf{C}$, il existe un réel $q_K > 1$ tel que si $x \in K$ et $1 < q < q_K$ alors $|(q-1)x| < 1$. La fonction $u_q(x)$ est alors bien définie et holomorphe au voisinage de K et $\mathcal{L}^{(q)}_{\mu,\alpha}(x)$ est méromorphe dans $\mathbf{C}$, à pôles d'ordre $\leq \mu$ appartenant à $[\alpha + \mathbf{N}^*]_q$.

Pour étudier le comportement à la limite, on peut comparer cette famille de "logarithmes" à une autre famille, pour laquelle le passage à la limite est classique ([**2**]).

Lemme 2.7. *La suite de fonctions définie pour* $k \in \mathbf{N}$ *par*

$$\widetilde{L}_k(u) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{dc^k}\frac{\Gamma_p(1-u+c)}{\Gamma_p(1-u)}\right)_{|c=0}$$

vérifie $\widetilde{L}_0(u) = 1$ *et pour* $k \geq 1$,

$$\widetilde{L}_k(u+1) - \widetilde{L}_k(u) = \frac{1}{1-q^{-u}} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \ln^j q \, \widetilde{L}_{k-j}(u+1).$$

De plus

$$\lim_{q \to 1^+} \widetilde{L}_k(u) = \psi_k(u)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{N}^*$.

Le lemme suivant donne le lien entre les fonctions L_k et $\widetilde{L}_k$.

Lemme 2.8. *On a* $L_1(u) = \widetilde{L}_1(u)$ *et, pour* $k \geq 2$,

$$L_k(u) = \widetilde{L}_k(u) + \sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} \ln^j q \, \widetilde{L}_{k-j}(u)$$

où les $a_{k,j}$ *sont des nombres rationnels indépendants de* q.

Preuve. On dérive k fois par rapport à λ la relation

$$\Gamma_p\left(1 - u - \frac{\ln \lambda}{\ln q}\right) = \Gamma_p(1-u+c) \circ c(\lambda)$$

où la fonction $c(\lambda) = -\ln \lambda / \ln q$ vérifie $c(1) = 0$ et, pour $k \geq 1$,

$$c^{(k)}(1) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{\ln q}.$$

La relation entre les dérivées est du type

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} \Gamma_p\left(1 - u - \frac{\ln \lambda}{\ln q}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j}{dc^j} \Gamma_p(1-u+c) \, P_j(c', c'', \cdots, c^{(k-j+1)})$$

où P_j est une somme à coefficients entiers positifs de termes de la forme $(c')^{n_1} (c'')^{n_2} \cdots (c^{(k-j+1)})^{n_{k-j+1}}$ vérifiant

$$n_1 + n_2 + \cdots n_{k-j+1} = j \quad \text{et} \quad n_1 + 2n_2 + \cdots + (k-j+1) n_{k-j+1} = k.$$

Le résultat s'obtient en donnant à λ la valeur 1. $\square$

Corollaire 2.9. *Lorsque* $q \to 1^+$, *la fonction* $\ell_{k,\alpha}^{(q)}(x)$ *converge vers* $\psi_{k,\alpha}$, *uniformément sur tout compact de* $\mathbf{C} \setminus (\alpha + \mathbf{N}^*)$.

La proposition suivante dresse le bilan du cas où il y a un seul bloc de Jordan.

Proposition 2.10. *Soit* $\alpha \in C$ *et* $A = \alpha I_\mu + N_\mu$ *avec* $\mu \geq 2$. *Posons*

$$A(q) = -[-\alpha]_q I_\mu + q^{-\alpha} \frac{\ln q}{q-1} N_\mu.$$

La matrice $\mathcal{L}^{(q)}_{\mu,\alpha}(x)$*, définie dans la proposition* 2.6*, est méromorphe dans* $\mathbf{C}$*, à pôles d'ordre* $\leq \mu$ *et appartenant à* $[\alpha+\mathbf{N}^*]_q$*. Elle constitue une matrice fondamentale de solutions du système*

$$p(x-1)\frac{X(px-p)-X(x)}{(p-1)x-p} = A(q)\,X(x).$$

Lorsque $q \to 1^+$*, la matrice* $\mathcal{L}^{(q)}_{\mu,\alpha}(x)$ *converge, uniformément sur tout compact de* $\mathbf{C}\setminus(\alpha+\mathbf{N}^*)$*, vers la matrice* $\mathcal{L}_{\mu,\alpha}(x)$*, définie dans le lemme* 2.4*. C'est une matrice fondamentale de solutions du système*

$$(x{-}1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = (\alpha I_\mu + N_\mu)\,X(x)$$

constituée de fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}$*, à pôles d'ordre* $\leq \mu$ *et appartenant à* $\alpha+\mathbf{N}^*$*.*

2.3. Cas général. La mise en commun de ces briques de base conduit au théorème suivant dans lequel on utilise les notations du lemme 2.4 et des propositions 2.3 et 2.6.

Théorème 2.11. *Soit* $A \in gl(\mu,\mathbf{C})$*. Il existe* $S \in \mathrm{GL}(\mu,\mathbf{C})$*, des complexes* $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ *et des entiers naturels non nuls* $\mu_1,\cdots,\mu_r$ *tels que* $\sum_{j=1}^r \mu_j = \mu$ *et* $A = S^{-1}\operatorname{diag}(A^{(1)},\cdots,A^{(r)})\,S$ *où, pour* $j=1,\cdots,r$*,*

$$A^{(j)} = \begin{cases} \alpha_j & \text{si } \mu_j = 1,\\ \alpha_j I_{\mu_j} + N_{\mu_j} & \text{si } \mu_j \geq 2.\end{cases}$$

Soit $(S(q))_{q>1}$ *une famille de matrices appartenant à* $\mathrm{GL}(\mu,\mathbf{C})$ *vérifiant* $\lim\limits_{q\to 1^+} S(q) = S$*. Posons*

$$A(q) = S(q)^{-1}\operatorname{diag}\big(A^{(1)}(q),\cdots,A^{(r)}(q)\big)\,S(q)$$

où, pour $j=1,\cdots r$*,*

$$A^{(j)}(q) = \begin{cases} -[-\alpha_j]_q & \text{si } \mu_j = 1,\\ -[-\alpha_j]_q I_{\mu_j} + q^{-\alpha_j}\dfrac{\ln q}{q-1} N_{\mu_j} & \text{si } \mu_j \geq 2.\end{cases}$$

Alors la matrice

$$\mathcal{E}^{(q)}_A(x) = S(q)^{-1}\operatorname{diag}\big(\mathcal{E}^{(1)}_q(x),\cdots,\mathcal{E}^{(r)}_q(x)\big),$$

où $\mathcal{E}^{(j)}_q(x) = z^{(q)}_{\alpha_j}(x)$ *si* $\mu_j = 1$ *et* $\mathcal{E}^{(j)}_q(x) = \mathcal{L}^{(q)}_{\mu_j,\alpha_j}(x)$ *si* $\mu_j \geq 2$*, constitue une matrice fondamentale de solutions du système*

$$p(x-1)\frac{X(px-p)-X(x)}{(p-1)x-p} = A(q)\,X(x).$$

La matrice $\mathcal{E}^{(q)}_A(x)$ *est formée de fonctions méromorphes dans* $\mathbf{C}$ *dont les pôles appartiennent à* $\bigcup_{j=1}^r([\alpha_j]_q+\mathbf{N}^*)$*. Un pôle de la forme* $k+[\alpha_j]_q$ *est d'ordre* $\leq \mu_j$*.*

Lorsque $q \to 1^+$, *la matrice* $\mathcal{E}_A^{(q)}(x)$ *converge, uniformément sur tout compact de* $\mathbf{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{\mu}(\alpha_j + \mathbf{N}^*)$, *vers la matrice*

$$\mathcal{E}_A(x) = S^{-1} \operatorname{diag}\left(\mathcal{E}^{(1)}(x), \cdots, \mathcal{E}^{(r)}(x)\right)$$

où $\mathcal{E}^{(j)} = f_{\alpha_j}(x)$ *si* $\mu_j = 1$ *et* $\mathcal{E}^{(j)} = \mathcal{L}_{\mu_j,\alpha_j}(x)$ *si* $\mu_j \geq 2$. *La convergence est uniforme sur tout compact de* $\mathbf{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{r}(\alpha_j + \mathbf{N}^*)$. *Si* $\alpha_j \in \mathbf{Z}$ *et* $\mu_j = 1$, *la ligne de pôles correspondante est absente si* $\alpha_j \geq 0$ *et remplacée par un ensemble fini de* $-\alpha_j$ *points si* $\alpha_j < 0$. *La matrice* $\mathcal{E}_A(x)$ *est une matrice fondamentale de solutions du système*

$$(x-1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = AX(x)$$

constituée de fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}$ *dont les pôles appartiennent à* $\bigcup_{j=1}^{r}(\alpha_j + \mathbf{N}^*)$. *Un pôle de la forme* $k + \alpha_j$ *est d'ordre* $\leq \mu_j$.

3. Système de première espèce

On établira au paragraphe 3.1 qu'un système $(\star)$ de première espèce de matrice $A(x)$ est $\mathcal{K}_f$ – équivalent au système de matrice constante $A_0 = A(\infty)$ lorsque celle-ci est *non résonnante*. Nous rappelons la définition de ce mot et le résultat, établi par exemple dans [**3**], qui permet, par une transformation polynomiale en $1/x$, de regrouper toutes les valeurs propres différant d'un entier en une seule valeur propre multiple.

Définition 3.1. Un système $(x-1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = A(x)X(x)$, dont la matrice $A(x) = \sum_{s\geq 0} A_s x^{-[s]}$ est une série de factorielles convergente, est dit *non résonnant* si les différences de deux valeurs propres distinctes de la matrice A_0 ne sont pas entières.

Proposition 3.2. *Appelons* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ *les valeurs propres* distinctes *de la matrice* A_0. *Il existe une transformation* $T(x) = T_0 + (1/x)\, T_1$, *où* T_0 *et* T_1 *sont des matrices constantes, telle que, si* $\widetilde{A}(x) = A^T(x)$, *les valeurs propres de* $\widetilde{A}_0$ *sont* $\alpha_1 + 1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$.

Nous supposons donc dans la suite que le système $(\star)$ est de première espèce et non résonnant. Remarquons qu'alors, si $A_0(q)$ est la déformation de A_0 définie dans le théorème 2.11 et si q est assez proche de 1, le quotient de deux valeurs propres distinctes de la matrice

$$B_0(q) = I_\mu - (q-1)A_0(q)$$

n'appartient pas à $q^{\mathbf{Z}}$.

Ce dernier paragraphe est composé de deux parties. Dans la première nous établissons que tout système non résonnant est équivalent au système constant de matrice $A(\infty)$. La deuxième partie traite le même problème pour le système q-déformé et donne un théorème de confluence.

3.1. Solution canonique dans le cas non résonnant. On établit tout d'abord la proposition suivante qui généralise celle établie dans [**1**] dans le cas régulier.

Proposition 3.3. *Soit* $(\star)$ *un système non résonnant vérifiant la condition* (C, λ). *On suppose que* 0 *est valeur propre de* A_0. *Pour tout vecteur* U_0 *appartenant au noyau de* A_0, *le système* $(\star)$ *admet une* unique *solution formelle* $X(x) = U_0 + \sum_{s\geq 1} X_s x^{-[s]}$. *De plus, si* $b = \sup_{s\geq 1} \big\|(sI_\mu + A_0)^{-1}\big\|$, $X(x)$ *vérifie la condition* $\big(bC\|U_0\|, \lambda + bC\big)$. *En particulier* $X(x)$ *converge pour* $\Re x > \lambda + bC$.

Preuve. Si $X(x) = U_0 + \sum\limits_{s\geq 1} X_s x^{-[s]}$ avec $X_s \in \mathbf{C}^m$, alors

$$(x-1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = -\sum_{s\geq 1} sX_s x^{-[s]}.$$

D'autre part

$$A(x)X(x) = A_0U_0 + \sum_{s\geq 1}\Bigg(A_0X_s + A_sU_0 + \sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} A_j X_\ell\Bigg)x^{-[s]}.$$

Puisque $A_0U_0 = 0$, le problème formel équivaut à la liste de relations, pour $s \geq 1$:

$$(sI_\mu + A_0)X_s + A_sU_0 + \sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} A_j X_\ell = 0$$

où $J_1 = \emptyset$ et pour $s \geq 2$:

$$J_s = \{j + \ell + k = s, j \geq 1, \ell \geq 1, k \geq 0\}$$

et

$$c_{j,\ell}^{(k)} = \frac{(j+k-1)!\,(\ell+k-1)!}{k!\,(j-1)!\,(\ell-1)!}.$$

Ces relations définissent de manière unique les X_s par récurrence puisque, pour tout $s \geq 1$, la matrice $sI_\mu + A_0$ est inversible.

On pose $u_0 = \|U_0\|$ et pour $s \geq 1$, $a_s = \|A_s\|$ et $\xi_s = \|X_s\|$. Par hypothèse la série $\sum_{s\geq 1} a_s x^{-[s]}$ converge pour $\Re x > \lambda$. Notons $a(x)$ sa somme.

La suite $\big\|(sI_\mu + A_0)^{-1}\big\|$ tend vers 0 quand $s \to \infty$ et donc b est fini. Le fait que les $c_{j,\ell}^{(k)}$ sont positifs permet d'obtenir la suite d'inégalités valables pour $s \geq 1$,

$$\xi_s \leq b\Bigg(a_s u_0 + \sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j \xi_\ell\Bigg).$$

Par récurrence on définit $\bar{\xi}_1 = ba_1u_0$ et, pour $s \geq 2$,

$$\bar{\xi}_s = b\Bigg(a_s u_0 + \sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j \bar{\xi}_\ell\Bigg),$$

de sorte que $0 \leq \xi_s \leq \bar{\xi}_s$ pour $s \geq 1$. Notons $\chi(x)$ la somme (au moins formelle) de la série $\sum_{s\geq 1} \bar{\xi}_s x^{-[s]}$. Elle vérifie l'équation

$$\chi(x) = b \sum_{s\geq 1} \Big(a_s u_0 + \sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j \bar{\xi}_\ell \Big) x^{-[s]} = b\big(u_0 a(x) + a(x)\chi(x)\big)$$

ou encore

$$\chi(x) = \frac{bu_0 a(x)}{1 - ba(x)} = -u_0\Big(1 - \frac{1}{1-ba(x)}\Big).$$

La proposition 2.1 de [**1**] fournit alors le résultat. □

Théorème 3.4. *Soit* $(\star)$ *un système non résonnant. Il existe une unique transformation formelle tangente à l'identité*

$$F(x) = I_\mu + \sum_{s\geq 1} F_s x^{-[s]}$$

telle que $A^F(x) = A_0$. *De plus* $F(x)$ *vérifie une condition* (C', λ') *et converge donc dans un demi-plan* $\Re x \gg 0$.

Preuve. Établissons d'abord l'existence d'une unique série formelle $F(x) = I_\mu + \sum_{s\geq 1} F_s x^{-[s]}$ vérifiant l'égalité

$$(*) \qquad A(x)F(x) - (x-1) \underset{-1}{\Delta} F(x) = F(x-1)A_0.$$

D'une part,

$$(x-1) \underset{-1}{\Delta} F(x) = -\sum_{s\geq 1} sF_s x^{-[s]}$$

et d'autre part, en utilisant la classique formule de translation, on a

$$F(x-1) = I_\mu + \sum_{s\geq 1} \Big(F_s + (s-1)! \sum_{k=1}^{s-1} \frac{F_k}{(k-1)!} \Big) x^{-[s]}.$$

Pour $M, N \in gl(\mu, \mathbf{C})$, notons $\Phi_{M,N}$ l'endomorphisme défini sur $gl(\mu, \mathbf{C})$ par $\Phi_{M,N}(U) = MU - UN$. L'équation $(*)$ équivaut alors à la liste de relations

$$\Phi_{A_0+I_\mu, A_0}(F_1) = -A_1$$

et pour $s \geq 2$,

$$\Phi_{A_0+sI_\mu, A_0}(F_s) = -A_s + (s-1)! \sum_{k=1}^{s-1} \frac{F_k A_0}{(k-1)!} - \sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} A_j F_\ell.$$

Dans le cas non résonnant, pour $s \geq 1$, les matrices $A_0 + sI_\mu$ et A_0 n'ont pas de valeur propre commune et $\Phi_{A_0+sI_\mu, A_0}$ est un isomorphisme. On en déduit par récurrence l'existence et l'unicité de la suite (F_s).

Pour établir la convergence de cette série de factorielles, on interprète $(*)$ comme un système de dimension μ^2 auquel on peut appliquer la proposition 3.3. Pour cela on remarque que $(*)$ s'écrit aussi

$$\begin{aligned}(x-1) \underset{-1}{\Delta} F(x) &= \big(A(x)F(x) - F(x)A_0\big)\Big(I_\mu - \frac{A_0}{x-1}\Big)^{-1} \\ &= \Big(A_0F(x) - F(x)A_0 + \sum_{s\geq 1} A_sF(x)x^{-[s]}\Big) \\ &\qquad \times \Big(I_\mu + \sum_{s\geq 1} A_0(A_0+I_\mu)\cdots\big(A_0+(s-1)I_\mu\big)x^{-[s]}\Big) \\ &= \sum_{s\geq 0} \mathcal{A}_s(F(x))x^{-[s]}\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_s$ est la suite d'opérateurs linéaires définis sur l'espace vectoriel $gl(\mu, \mathbf{C})$ par $\mathcal{A}_0(U) = A_0U - UA_0$, $\mathcal{A}_1(U) = A_1U + (A_0U - UA_0)A_0$ et pour $s \geq 2$,

$$\mathcal{A}_s(U) = A_sU + (A_0U - UA_0)B_s + \sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} A_jUB_\ell$$

où on a posé, pour $s \geq 1$, $B_s = A_0(A_0 + I_\mu)\cdots(A_0 + (s-1)I_\mu)$.

L'opérateur $\mathcal{A}_0$ admet 0 pour valeur propre et $U = I_\mu$ est un vecteur propre pour cette valeur propre. L'hypothèse de non résonnance implique qu'aucun entier non nul n'est valeur propre de $\mathcal{A}_0$.

D'autre part, si $A(x)$ vérifie la condition (C, λ) et si $a_0 = \|A_0\|$, la norme de l'opérateur $\mathcal{A}_s$ se majore par

$$K_s = C\,\frac{\Gamma(\lambda+s-1)}{\Gamma(\lambda)} + 2a_0\frac{\Gamma(a_0+s)}{\Gamma(a_0)} + C\sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)}\frac{\Gamma(a_0+j)}{\Gamma(a_0)}\,\frac{\Gamma(\lambda+\ell-1)}{\Gamma(\lambda)}.$$

En exprimant que les séries de factorielles obtenues en développant les deux fonctions

$$1 - \frac{a_0-\lambda+1}{x-\lambda} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{a_0-\lambda+1}{x-a_0-1}$$

sont inverses l'une de l'autre, on obtient la formule ([**1**] p. 343)

$$(a_0-\lambda+1)\sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)}\frac{\Gamma(a_0+j)}{\Gamma(a_0+1)}\,\frac{\Gamma(\lambda+\ell-1)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{\Gamma(a_0+s)}{\Gamma(a_0+1)} - \frac{\Gamma(\lambda+s-1)}{\Gamma(\lambda)}.$$

On en déduit :

$$K_s = C\frac{1-\lambda}{a_0+1-\lambda}\,\frac{\Gamma(\lambda+s-1)}{\Gamma(\lambda)} + \Big(2a_0 + \frac{C}{a_0+1-\lambda}\Big)\frac{\Gamma(a_0+s)}{\Gamma(a_0)}.$$

En posant $\widetilde{\lambda} = \max(\lambda, a_0+1)$, on prouve l'existence d'une constante $\widetilde{C} > 0$ telle que $K_s \leq \widetilde{C}\,\Gamma(\widetilde{\lambda}+s-1)/\Gamma(\widetilde{\lambda})$, ce qui permet d'appliquer la proposition 3.3. $\square$

Le système ($\star$) admet donc un système fondamental de solutions de la forme $F(x)\mathcal{E}_{A_0}(x)$ où $F(x)$ est l'unique solution de $A^F(x) = A_0$ telle que $F(\infty) = I_\mu$ et $\mathcal{E}_{A_0}(x)$, défini dans le théorème 2.11, dépend de la forme normale de Jordan J_0 de A_0 mais aussi du choix d'une matrice S conjuguant A_0 à J_0. La forme normale J_0 est unique lorsqu'on a fixé l'ordre de ses blocs et la matrice $\mathcal{E}_{J_0}(x)$ est alors clairement définie. On va voir que ($\star$) admet un système fondamental de solutions indépendant du choix de la matrice S. Cette propriété repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 3.5. *Soit $S \in \mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$. La matrice $F(x)S^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)$ est un système fondamental de solutions de ($\star$) si et seulement si $J_0S = SA_0$.*

Preuve. La définition de $\mathcal{E}_{A_0}(x)$ montre que $\mathcal{E}_{A_0}(x) = S^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)$ si $S \in \mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$ a été choisie telle que $J_0S = SA_0$. Inversement si $S \in \mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$ est telle que $F(x)S^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)$ soit une solution de ($\star$), alors on doit avoir $A^{FS^{-1}} = J_0$. Puisque $A^F = A_0$, on en déduit $A_0^{S^{-1}} = J_0$ ou encore $SA_0S^{-1} = J_0$. □

Lemme 3.6. *Toute matrice constante qui commute avec J_0 commute avec $\mathcal{E}_{J_0}(x)$.*

Preuve. Reprenons les notations du théorème 2.11 et supposons que

$$J_0 = \mathrm{diag}\,(A^{(1)}, \cdots, A^{(r)})$$

où chaque $A^{(j)}$ est un bloc de Jordan élémentaire de dimension μ_j, de la forme $A^{(j)} = \alpha_j$ si $\mu_j = 1$ et $A^{(j)} = \alpha_j I_{\mu_j} + N_{\mu_j}$ si $\mu_j \geq 2$. Partitionnons toute matrice constante S selon cette décomposition en blocs élémentaires : $S = (S_{j,h})_{1\leq j,h\leq r}$. On sait que S commute avec J_0 si et seulement si chaque bloc vérifie :

- $S_{j,h} = 0$ si $\alpha_j \neq \alpha_h$
- $N_{\mu_j}S_{j,h} = S_{j,h}N_{\mu_h}$ si $\alpha_j = \alpha_h$.

La matrice $\mathcal{E}_{J_0}(x)$ a la même structure en blocs diagonaux que J_0 et le bloc d'indice j est

$$\mathcal{E}^{(j)}(x) = f_{\alpha_j}(x)\Big(I_{\mu_j} + \sum_{k=1}^{\mu_j-1} \psi_{k,\alpha_j}(x)N_{\mu_j}^k\Big).$$

La condition de commutation de S et de $\mathcal{E}_{J_0}(x)$ s'écrit

$$S_{j,h}\mathcal{E}^{(h)}(x) = \mathcal{E}^{(j)}(x)S_{j,h}$$

pour $j, h = 1, \cdots, r$. Ces relations sont vérifiées pour les indices tels que $\alpha_j \neq \alpha_h$ puisqu'alors $S_{j,h} = 0$. Lorsque $\alpha_j = \alpha_h = \alpha$, la condition s'écrit

$$S_{jh} + \sum_{k=1}^{\mu_h-1} \psi_{k,\alpha}(x)S_{jh}N_{\mu_h}^k = S_{jh} + \sum_{k=1}^{\mu_j-1} \psi_{k,\alpha}(x)N_{\mu_j}^k S_{jh}$$

ou encore en remarquant que $N_{\mu_h}^k = 0$ pour $k \geq \mu_h$ et $N_{\mu_j}^k = 0$ pour $k \geq \mu_j$,

$$\sum_{k\geq 1} \psi_{k,\alpha}(x) S_{jh} N_{\mu_h}^k = \sum_{k\geq 1} \psi_{k,\alpha}(x) N_{\mu_j}^k S_{jh}$$

égalité qui est assurée par les relations $N_{\mu_j} S_{jh} = S_{jh} N_{\mu_h}$. □

Théorème 3.7. *Soit* $(\star)$ *un système de première espèce et* $A_0 = A(\infty)$. *Soit* $F(x)$ *la solution de* $A^F = A_0$ *donnée par le théorème* 3.4. *Soit* J_0 *une forme de Jordan de* A_0 *et* $\mathcal{E}_{J_0}(x)$ *la matrice qui lui est associée dans le théorème* 2.11. *La matrice* $F(x)S^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)S$ *est une matrice fondamentale de solutions de* $(\star)$, *indépendante du choix de* $S \in \mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$ *vérfiant* $J_0 S = S A_0$.

Preuve. Le lemme 3.5 et le fait qu'en multipliant à droite une matrice de solutions par une matrice constante on obtient une matrice de solutions montrent que si S_1 et S_2 vérifient la condition indiquée, $F(x)S_i^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)S_i$ $(i = 1, 2)$ est une matrice fondamentale de solutions de $(\star)$. Puisque la matrice $S = S_1 S_2^{-1}$ commute avec J_0, le lemme 3.6 permet d'écrire

$$S_1^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)S_1 = S_1^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)S_1S_2^{-1}S_2 = S_1^{-1}S_1S_2^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)S_2 = S_2^{-1}\mathcal{E}_{J_0}(x)S_2$$

et le résultat s'en déduit par multiplication à gauche par $F(x)$. □

Définition 3.8. On appelle *solution canonique* du système $(\star)$ et on note $\mathcal{X}_{\mathrm{can}}(x)$ la matrice fondamentale de solutions décrite dans le théorème 3.7.

3.2. Système *q*-déformé et confluence. On indique maintenant comment choisir un système q-déformé d'un système $(\star)$ non résonnant. Cette étude est faite dans le plan de la variable $t = (q-1)x + 1$ où le système aux q-différences obtenu est du type étudié dans [**7**]. Nous aurons cependant besoin de reprendre en partie les résultats classiques de façon à pouvoir traiter la confluence à l'aide des théorèmes de [**1**].

On déforme le système $(\star)$ en un système

$$(\widetilde{\star})_q \qquad (pt-1)\delta_p Y(t) = A_q(t)Y(t)$$

où $A_q(t) = \displaystyle\sum_{s\geq 0} \frac{A_s(q)}{(t;q)_s}$ est une série de q-factorielles convergente.

L'équation $(\widetilde{\star})_q$ peut aussi s'écrire

$$(\widetilde{*})_q \qquad Y(t) = B_q(t)Y(qt)$$

où

$$B_q(t) = I_\mu + \frac{(1-q)t}{t-1} A_q(qt).$$

Puisque la somme d'une série de q-factorielles convergente est holomorphe à l'infini, si la matrice $B_q(\infty) = I_\mu + (1-q)A_0(q)$ est inversible, le système $(\widetilde{*})_q$ est *fuchsien* à l'infini au sens de [**7**]. Il est *non résonnant*, toujours au sens de [**7**], si le quotient de deux valeurs propres distinctes de $B_0(q) = I_\mu - (q-1)A_0(q)$ n'appartient pas à $q^{\mathbf{Z}}$. Dans ce cas, on peut montrer ([**7**]) qu'il existe une *unique* matrice $F_q(t) \in \mathrm{GL}\big(\mu, \mathbf{C}[\![\frac{1}{t}]\!]\big)$ telle que $F_q(\infty) = I_\mu$ et $A_q^{F_q}(t) = A_0(q)$ où $A_q^{F_q}(t) = F_q(pt)^{-1}\big(A_q(t)F_q(t) - (pt-1)\delta_p F_q(t)\big)$ est la matrice du système obtenu à partir de $(\widetilde{\star})_q$ par le changement de fonction inconnue $Y(t) = F_q(t)Z(t)$. De plus la série $F_q(t)$ converge. Ce résultat permet de décrire un système fondamental de solutions de $(\widetilde{\star})_q$ pour q fixé, mais pour obtenir des propriétés de confluence, il faut préciser la dépendance en q des coefficients $A_s(q)$.

Supposons que la matrice $A(x) = \sum_{s\geq 0} A_s x^{-[s]}$ du système $(\star)$ à déformer vérifie la condition (C, λ). Pour $A_0(q)$, on reprend les notations et hypothèses faites dans le théorème 2.11 en remplaçant A par A_0. Si le sytème $(\star)$ est non résonnant tout système $(*)_q$ dont la matrice $A_q(t)$ a pour terme constant $A_0(q)$ est alors non résonnant si q est assez proche de 1. On suppose ensuite que les coefficients $A_s(q)$, $s \geq 1$, vérifient les hypothèses suivantes (voir [**1**]) :

1) il existe $q_0 > 1$ tel que si $1 < q < q_0$, alors
$$\|A_s(q)\| \leq (q^C - 1)\, q^{s+\lambda-1} |\left(q^\lambda; q\right)_{s-1}|,$$
2) $\lim_{q\to 1^+}(1-q)^{-s}A_s(q) = A_s$.

On suppose q_0 assez petit pour que $B_0(q)$ soit non résonnante pour $1 < q < q_0$ et on résume toutes ces hypothèses en disant que le système $(\widetilde{\star})_q$ est obtenu par q-déformation du système $(\star)$. On suit une démarche analogue à celle du paragraphe 3.1 et on commence par établir le q-analogue suivant de la proposition 3.3, sous des hypothèses restrictives mais suffisantes pour notre étude.

Proposition 3.9. *Soit $(\widetilde{\star})_q$ un système obtenu par q-déformation d'un système $(\star)$ non résonnant dont la matrice A_0 admet 0 pour valeur propre. On suppose qu'il existe un vecteur U_0, indépendant de q, appartenant au noyau de $A_0(q)$ pour tout q assez proche de 1. Le système $(\widetilde{\star})_q$ admet alors, pour q assez proche de 1, une unique solution formelle*
$$Y(t) = U_0 + \sum_{s\geq 1} \frac{Y_s(q)}{(t;q)_s}.$$
De plus il existe $C' > 0$ et $q_0 > 1$ tels que pour tout $s \geq 1$ et tout q tel que $1 < q \leq q_0$, on ait
$$\|Y_s(q)\| \leq \|U_0\|\, (q^{C'} - 1)\, q^{s+\lambda+C'-1} \left|(q^{\lambda+C'}; q)_{s-1}\right|.$$

Preuve. On recopie celle de la proposition 3.3, en utilisant la série majorante
$$\chi(t) = -u_0\left(1 - \frac{1}{1 - b(q)a_q(t)}\right)$$

où $u_0 = \|U_0\|$, $a_q(t) = \sum_{s\geq 1} \|A_s(q)\|/(t;q)_s$ et $b(q)$ majore la norme de toutes les matrices $\big([s]_q I_\mu + A_0(q)\big)^{-1}$. Pour estimer $b(q)$, on remarque que les valeurs propres de $\big([s]_q I_\mu + A_0(q)\big)^{-1}$ sont de la forme $(q-1)/(q^s - q^{-\alpha})$ où α est une valeur propre de A_0, et peuvent se majorer, pour tout $q > 1$, par 1 si $\Re\alpha > 0$, par $(q-1)/(q^b-1)$ où $b = d(\Re\alpha, -\mathbf{N}^*)$ si $\Re\alpha \notin -\mathbf{N}^*$ et par la même expression avec $b < |\varepsilon|$ et pour $q \leq q_0$ si $\alpha = -s_0 + i\varepsilon$ où $s_0 \in \mathbf{N}^*$. On peut ensuite majorer la norme du bloc de taille ν correspondant à α : $(q-1)\big((q^s - q^{-\alpha})I_\nu + q^{-\alpha}\ln q N_\nu\big)^{-1}$ par

$$\frac{q-1}{q^b-1}\,\frac{1-q^{-\nu\Re\alpha}}{1-q^{-\Re\alpha}}$$

si $\Re\alpha \neq 0$ et par $\nu(q-1)/(q^b-1)$ si $\Re\alpha = 0$. Ces estimations et l'hypothèse faite sur $a_q(t)$ permettent d'utiliser la proposition 4.5 de [**1**] pour conclure. □

Donnons maintenant l'analogue de la proposition 3.4 en indiquant les modifications à apporter à sa preuve.

Proposition 3.10. *Soit* $(\widetilde{\star})_q$ *un système obtenu par q-déformation d'un système* $(\star)$ *non résonnant. L'unique transformation tangente à l'identité* $F_q(t)$ *telle que* $A_q^{F_q}(t) = A_0(q)$ *admet un développement en série de q-factorielles* $F_q(t) = I_\mu + \sum_{s\geq 1} \frac{F_s(q)}{(t;q)_s}$ *dont les coefficients vérifient les deux propriétés* :

1) *il existe* $q_0 > 1$, $C', \lambda' > 0$ *tels que pour tout* q *avec* $1 < q < q_0$ *et tout* $s \geq 1$,
$$\|F_s(q)\| \leq (q^{C'} - 1)q^{s+\lambda'-1}|(q^{\lambda'};q)_{s-1}|,$$
2) $\lim_{q\to 1^+}(1-q)^{-s}F_s(q) = F_s$ *où* $F(x) = I_\mu + \displaystyle\sum_{s\geq 1} F_s x^{-[s]}$ *est la série de factorielles du théorème* 3.4.

Preuve. Comme dans la preuve du théorème 3.4, la majoration s'obtient en appliquant la proposition 3.9 avec $U_0 = I_\mu$ au système de dimension μ^2 suivant qui exprime la condition $A_q^{F_q}(t) = A_0(q)$:

$$(pt-1)\delta_p F_q(t) = (A_q(t)F_q(t) - F_q(t)A_0(q))\left(B_0(q) + \frac{1-q}{pt-1}A_0(q)\right)^{-1}.$$

On a $\displaystyle\left(B_0(q) + \frac{1-q}{pt-1}A_0(q)\right)^{-1} = \sum_{s\geq 0}\frac{C_s(q)}{(t;q)_s}$ où $C_0(q) = B_0(q)^{-1}$ et pour $s \geq 1$,

$$C_s(q) = q^s(1-q)^s B_0(q)^{-s-1}A_0(q)(A_0(q)+I_\mu)\cdots(A_0(q)+[s-1]_q I_\mu).$$

On peut alors écrire

$$(pt-1)\delta_p F_q(t) = \sum_{s\geq 0} \mathcal{A}_s(q)(F_q(t)) \frac{1}{(t;q)_s}$$

où $\mathcal{A}_s(q)$ est l'opérateur linéaire sur $gl(\mu, \mathbf{C})$ défini par

$$\mathcal{A}_0(q)(U) = \big(A_0(q)U - UA_0(q)\big)B_0(q)^{-1}$$

et, pour $s \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_s(q)(U) = A_s(q)UB_0(q)^{-1} &+ \big(A_0(q)U - UA_0(q)\big)C_s(q) \\ &+ \sum_{(j,\ell,k)\in J_s} c_{j,\ell}^{(k)}(q)A_j(q)UC_\ell(q).\end{aligned}$$

où J_s est l'ensemble d'indices défini dans la preuve de la proposition 3.3 et où

$$c_{j,\ell}^{(k)}(q) = q^{k+j\ell}(1-q)^k \frac{[j+k-1]!\,[\ell+k-1]!}{[k]!\,[j-1]!\,[\ell-1]!}$$

si on pose $[0]! = 1$ et, pour $n \in N$, $[n]! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q$.

La deuxiéme hypothèse faite sur la suite $A_s(q)$ implique que pour $s \geq 1$, $\lim\limits_{q\to 1}(1-q)^{-s}C_s(q) = B_s$ (notation du théorème 3.4). En utilisant le fait que

$$\widetilde{c}_{j,\ell}^{(k)}(q) = c_{j,\ell}^{(k)}(q)(1-q)^{-k} \to c_{j,\ell}^{(k)}$$

quand $q \to 1$, on vérifie que l'opérateur $(1-q)^{-s}\mathcal{A}_s(q)$ a pour limite l'opérateur $\mathcal{A}_s$.

Pour majorer la norme de $\mathcal{A}_s(q)$, on procède comme dans la preuve de 3.4 en utilisant le lemme 4.4 de [**1**]. Pour cela on remarque qu'en posant $D_0(q) = A_0(q)B_0(q)^{-1}$, chaque bloc de Jordan de $D_0(q)$ est de la forme

$$[\alpha]_q I_\nu + \frac{q^\alpha}{q-1} \sum_{i=1}^{\nu-1} \ln^i q N_\nu^i$$

où α est une valeur propre de A_0 et ν la taille du bloc de Jordan correspondant. D'autre part, on peut écrire

$$C_s(q) = q^s(1-q)^s B_0(q)^{-1} \prod_{k=0}^{s-1} \big(D_0(q) + [k]_q B_0(q)^{-1}\big)$$

et remarquer que chaque bloc de Jordan de $D_0(q) + [k]_q B_0(q)^{-1}$ est de la forme

$$[\alpha+k]_q I_\nu + \frac{q^{\alpha+k}}{q-1} \sum_{i=1}^{\nu-1} \ln^i q N_\nu^i. \qquad \square$$

En conclusion on énonce un théorème synthétisant l'étude faite dans le plan de la variable x initiale, ce qui conduit (toujours selon [**1**]) à remplacer les séries de q-factorielles par les séries de factorielles mixtes et à modifier en conséquence les hypothèses demandées à une q-déformation. Le résultat final de convergence est une application du théorème 3.1 de [**1**].

Théorème 3.11. *Soit*

$$(\star)\qquad (x-1) \underset{-1}{\Delta}\ X(x) = A(x)X(x)$$

un système aux différences non résonnant dont la matrice

$$A(x) = \sum_{s\geq 0} A_s x^{-[s]}$$

vérifie la condition (C,λ).

Soit $S \in \mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbf{C}$ *et* $\mu_1, \cdots, \mu_r \in \mathbf{N}^*$ *tels que* $\sum_{j=1}^r \mu_j = \mu$ *et que, en posant, pour* $j = 1, \cdots, r$,

$$A^{(j)} = \begin{cases} \alpha_j & si\ \mu_j = 1, \\ \alpha_j I_{\mu_j} + N_{\mu_j} & si\ \mu_j \geq 2, \end{cases}$$

on ait

$$A_0 = S^{-1} \operatorname{diag}(A^{(1)}, \cdots, A^{(r)})\, S.$$

On note $\mathcal{X}_{\mathrm{can}}(x)$ *la solution canonique de* $(\star)$.

Soit $(S(q))_{q>1}$ *une famille de matrices appartenant à* $\mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C})$ *vérifiant* $\lim_{q\to 1^+} S(q) = S$. *Posons, pour* $q > 1$,

$$A_0(q) = S(q)^{-1} \operatorname{diag}\left(A^{(1)}(q), \cdots, A^{(r)}(q)\right) S(q)$$

où, pour $j = 1, \cdots r$,

$$A^{(j)}(q) = \begin{cases} -[-\alpha_j]_q & si\ \mu_j = 1, \\ -[-\alpha_j]_q I_{\mu_j} + q^{-\alpha_j} \dfrac{\ln q}{q-1} N_{\mu_j} & si\ \mu_j \geq 2. \end{cases}$$

Soit $A_q(x) = \sum_{s\geq 1} A_s(q) e_s^{(q)}(x)$ *une série de factorielles mixtes telle que pour tout* $s \geq 1$:

1) *il existe* $q_0 > 1$ *tel que pour* $1 < q < q_0$, $\|A_s(q)\| \leq C \dfrac{q^{s-1}}{e_{s-1}^{(q)}(\lambda)}$,

2) $\lim_{q\to 1^+} A_s(q) = A_s$.

Alors, il existe une unique série formelle de factorielles mixtes

$$\mathcal{F}_q(x) = I_\mu + \sum_{s\geq 1} F_s(q) e_s^{(q)}(x)$$

telle que, si $\mathcal{E}_{A_0}^{(q)}(x)$ *est la matrice définie dans le théorème* 2.11, *la matrice*

$$\mathcal{X}_q(x) = \mathcal{F}_q(x) \mathcal{E}_{A_0}^{(q)}(x) S(q)$$

constitue un système fondamental de solutions du système

$$(\star)_q \qquad p(x-1) \frac{X(px-p) - X(x)}{(p-1)x - p} = \left(A_0(q) + A_q(x)\right) X(x).$$

De plus, il existe $\lambda' \geq \lambda$ *tel que la série* $\mathcal{F}_q(x)$ *converge pour*

$$\left| x - \frac{1}{1-q} \right| > \lambda' - \frac{1}{1-q}.$$

Lorsque $q \to 1^+$, $\mathcal{X}_q(x)$ *converge vers* $\mathcal{X}_{\mathrm{can}}(x)$, *uniformément sur tout compact de* $\{\Re x \geq \lambda' + 1\} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} (\alpha_j + \mathbf{N}^*)$.

Exemple. En dimension 1, l'équation

$$(x-1) \underset{-1}{\Delta} y(x) = \Big(a - \frac{\mu}{x-\lambda} \Big) y(x)$$

s'écrit

$$y(x+1) = \frac{x(x+\lambda-1)}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)} y(x)$$

où $\mu_1 + \mu_2 = \lambda + a - 1$ et $\mu_1\mu_2 = \mu - a(1-\lambda)$. Le changement de fonction inconnue

$$y(x) = \frac{\Gamma(1+a-x)}{\Gamma(1-x)} z(x)$$

la transforme en

$$z(x+1) = \frac{(x-a)(x+1-\lambda)}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)} z(x)$$

dont la solution, holomorphe dans un demi-plan $\Re x \gg 0$ et ayant 1 pour limite quand $x \to \infty$ dans ce demi-plan, est la fonction

$$z_+(x) = \frac{\Gamma(x-a)\,\Gamma(x+1-\lambda)}{\Gamma(x-\mu_1)\,\Gamma(x-\mu_2)}.$$

Cette fonction admet un développement en série de factorielles convergente qui peut s'obtenir en remarquant que la formule de Gauss–Kummer permet d'écrire pour $\Re x > \Re\lambda - 1$,

$$z_+(x) = {}_2F_1(\mu_1 - a, \mu_2 - a; x-a; 1).$$

Il suffit alors d'appliquer la formule de translation à cette série de factorielles en $x-a$.

La solution canonique de l'équation donnée est donc

$$y_+(x) = \frac{\Gamma(1+a-x)}{\Gamma(1-x)} z_+(x).$$

Un résultat classique rappelé dans [**4**] permet de voir $z_+(x)$ comme limite quand $q \to 1^+$ de ${}_2\phi_1(q^{\mu_1 - a}, q^{\mu_2 - a}, q^{x-a}; q; q)$ où, par définition,

$${}_2\phi_1(a,b,c;q;u) = \sum_{s \geq 0} \frac{(a;q)_s (b;q)_s}{c;q)_s (q;q)_s} u^s$$

est une série convergente pour $|u| < |qc/(ab)|$. De plus, le q-analogue de la formule de Gauss–Kummer est la formule suivante (Jacobi et Heine, citée par [**4**]) :

$$ {}_2\phi_1(a,b,c;q;q) = \frac{(a/c;p)_\infty((b/c;p)_\infty}{(1/c;p)_\infty(ab/c;p)_\infty}. $$

Ces remarques, jointes à la proposition 2.3, conduisent à considérer la fonction

$$ g_q(t) = \frac{(pt;p)_\infty(q^{\mu_1}/t;p)_\infty(q^{\mu_2}/t;p)_\infty}{(q^{-a-1}t;p)_\infty(q^a/t;p)_\infty(q^{\lambda-1}/t;p)_\infty} $$

qui vérifie

$$ g_q(qt) = q^a\frac{(t-1)(t-q^{\lambda-1})}{(t-q^{\mu_1})(t-q^{\mu_2})}g_q(t). $$

On en déduit

$$ (pt-1)\delta_p g_q(t) = A_q(t)g_q(t) $$

où

$$ A_q(t) = q^{-a-1}\frac{(t-q^{\mu_1+1})\,(t-q^{\mu_2+1})}{(p-1)\,t\,(t-q^\lambda)} - \frac{pt-1}{(p-1)t} $$

En tenant compte de le relation $\mu_1+\mu_2+1-a-\lambda = 0$ dans la décomposition en éléments simples de $A_q(t)$, on trouve

$$ A_q(t) = -[-a]_q + \frac{(q^{\lambda-\mu_1-1}-1)(q^{\lambda-\mu_2-1}-1)}{(p-1)(t-q^\lambda)}. $$

Dans le plan de la variable x, la fonction $f_q(x) = g_q((q-1)x+1)$ vérifie

$$ p(x-1)\frac{f_q(px-p)-f_q(x)}{(p-1)x-p} = \left(-[-a]_q + \frac{[\lambda-\mu_1-1]_q[\lambda-\mu_2-1]_q}{x-[\lambda]_q}\right)f_q(x). $$

On remarque que les conditions sur les paramètres impliquent la relation $(\lambda-\mu_1-1)(\lambda-\mu_2-1) = \mu$ et l'équation obtenue est clairement une déformation de l'équation initiale.

References

[1] A. Duval, *Séries de q-factorielles, opérateurs aux q-différences et confluence*, Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse, **12** (2003), 335–374, MR 2030091.

[2] A. Duval, *Une remarque sur les "logarithmes" associés à certains caractères*, Aequationes Math., **68** (2004), 88–97.

[3] W.J. Fitzpatrick and L.J. Grimm, *Convergent factorial series solutions of linear difference equations*, J. Differential Equations, **29** (1978), 345–361, MR 0507483 (80f:39003), Zbl 0403.39001.

[4] G. Gasper, *Elementary derivations of summation and transformation formulas for q-series*, Special functions, q-series and related topics (Toronto, ON, 1995), Fields Inst. Commun., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 55–70, MR 1448679 (98f:33030), Zbl 0873.33013.

[5] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, MR 1052153 (91d:33034), Zbl 0695.33001.

[6] W.A. Harris, Jr., *Analytic theory of difference equations* in 'Analytic theory of differential equations' (Proc. Conf., Western Michigan Univ., Kalamazoo, Mich., 1970), Lecture Notes in Mathematics, **183**, Springer, Berlin 1971, 46–58, MR 0390565 (52 #11390), Zbl 0232.39001.

[7] J. Sauloy, *Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie*, Ann. Inst. Fourier, **50** (2000), 1021–1071, MR 1799737 (2001m:39043), Zbl 0957.05012.

Received October 22, 2003 and revised April 13, 2004.

Laboratoire Paul Painleve
UMR-CNRS 8524
U.F.R. de Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq
Cedex
France
E-mail address: duval@math.univ-lille1.fr