Pacific Journal of Mathematics

CAPITULATION DES 2-CLASSES D'IDÉAUX DE CERTAINS CORPS BIQUADRATIQUES DONT LE CORPS DE GENRES DIFFÈRE DU 2-CORPS DE CLASSES DE HILBERT

ABDELMALEK AZIZI ET ALI MOUHIB

Volume 218 No. 1 January 2005

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 218, No. 1, 2005

CAPITULATION DES 2-CLASSES D'IDÉAUX DE CERTAINS CORPS BIQUADRATIQUES DONT LE CORPS DE GENRES DIFFÈRE DU 2-CORPS DE CLASSES DE HILBERT

ABDELMALEK AZIZI ET ALI MOUHIB

Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$, where d_1 and d_2 are positive square-free integers such that $(d_1, d_2) = 1$. Let $K_2^{(1)}$ be the Hilbert 2-class field of K. Let $K_2^{(2)}$ be the Hilbert 2-class field of $K_2^{(1)}$ and $K^{(*)}$ the genus field of K. We suppose that $K_2^{(1)} \neq K^{(*)}$ and $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. We study the capitulation problem of the 2-ideal classes of K in the sub-extensions of $K_2^{(1)}/K$ and we determine the structure of $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)})$.

1. Introduction

Soient K un corps de nombres, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$, G le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ et $K^{(*)}$ le corps de genres de K, c'est-à-dire la plus grande extension de K da la forme KL non ramifiée pour tous les premiers finis et infinis et telle que $L/\mathbb{Q}$ est abélienne.

On suppose que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; alors $K_2^{(1)}$ contient trois sous-extensions quadratiques sur K qu'on désigne par K_1, K_2 et K_3. Kisilevsky [1976] a lié le problème de capitulation dans les extensions K_1/K, K_2/K et K_3/K à la structure du groupe G et aussi à la structure de la 2-partie du groupe de classes de ces trois extensions. Plus précisément, Olga Taussky a démontré que le groupe G est abélien, diédral, quaternionique ou semi-diédral (voir par exemple [Gorenstein 1980]). Par conséquent, il existe $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ tel que le 2-groupe de classes de K_{i_0} est cyclique et on a deux possibilités:

1) Les 2-groupes de classes des extensions K_1, K_2 et K_3 sont cycliques et dans ce cas G est abélien ou quaternionique d'ordre 8. Plus précisément:
   - G est abélien si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ toutes les 2-classes de K capitulent dans K_i.
   - G est quaternionique d'ordre 8 si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe une seule 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_i.
2) Le 2-groupe de classes de K_{i_0} est cyclique et pour $i \neq i_0$, le 2-groupe de classes de K_i est de type $(2, 2)$ et dans ce cas:

MSC2000: 11R27, 11R37.
Mots-clefs: groupe de classes, capitulation, corps de classes de Hilbert.

- Pour $i \neq i_0$, il existe une seule 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_i.
- G est diédral si et seulement si toutes les 2-classes de K capitulent dans K_{i_0}.
- G est quaternionique d'ordre superieur ou égal à 2^4 si et seulement si il existe une seule 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_{i_0} et K_{i_0} est de type (A). (Pour la définition du type (A) et du type (B), voir par exemple [Kisilevsky 1976].)
- G est semi-diédral d'ordre superieur ou égal à 2^4 si et seulement si il existe une seule 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_{i_0} et K_{i_0} est de type (B).

Ces résultats nous permettent de réduire l'étude du problème de capitulation dans les extensions intermédiaires de $K_2^{(1)}/K$ à une étude dans K_{i_0}.

Si K est un corps biquadratique et $K_2^{(1)} \neq K^{(*)}$, alors d'après la théorie des groupes $K^{(*)} \neq K$ (car sinon $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$ serait cyclique) et par suite $K^{(*)}$ est l'un des corps K_1, K_2 ou K_3.

Dans [Azizi et Mouhib $\geq$ 2008], on a démontré que si $K_2^{(1)}/K$ a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour Galois groupe et $[K_2^{(1)} : K^{(*)}] = 2$, alors:

1) Le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique et $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$.
2) Le groupe G ne peut jamais être semi-diédral.

Dans ce travail, on suppose que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ où d_1 et d_2 sont deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux, $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $K_2^{(1)} \neq K^{(*)}$. Alors on étudie le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K en distinguant deux cas:

1) L'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est non ramifiée.
2) L'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est ramifiée.

Avant d'étudier ces cas, on aura besoin de certains résultats sur le rang du 2-groupe de classes des corps biquadratiques réels contenant un corps quadratique de nombre de classes impair. Dans toute la suite, on désigne par $h(n)$ la 2-partie du nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ et par $h(M)$ la 2-partie du nombre de classes d'un corps quelconque M.

2. Rang du 2-groupe de classes de certains corps biquadratiques réels

Dans ce paragraphe on suppose que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où m et d sont deux entiers naturels sans facteurs carrés et le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ est impair. On désigne par ε_m l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, E le groupe des unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, r le nombre des premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans K, $\mathcal{N}$ l'application norme par rapport à l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, e l'entier naturel défini par $2^e = [E : E \cap \mathcal{N}(K)^*]$ et par $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K. Dans [Azizi et Mouhib 2001], on a montré que le rang de $C_{2,K}$ est $r-1-e$. La détermination de l'entier e revient à chercher quand est-ce que les éléments -1, ε_m et $-\varepsilon_m$ sont normes ou non dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Ce qui revient à chercher les valeurs du symbole du reste normique $\left(\frac{-1,\,d}{\mathcal{P}}\right)$, $\left(\frac{\varepsilon_m,\,d}{\mathcal{P}}\right)$ pour tous les premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans K. Ainsi $e\in\{0,1,2\}$; plus précisément:

$e=0$ si et seulement si -1 et ε_m sont des normes dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

$e=2$ si et seulement si -1, ε_m et $-\varepsilon_m$ ne sont pas des normes dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. D'autre part, d'après la théorie des genres m est de l'une des formes suivantes:

1) m est un premier.
2) $m=2q$ où q est un premier tel que $q\equiv -1 \pmod 4$.
3) $m=q'q''$ où q' et q'' sont deux premiers tels que $q'\equiv q''\equiv -1 \pmod 4$.

Théorème 1 [Azizi et Mouhib 2001]. *Soient m un premier $\equiv 1$ ou $2 \pmod 4$ et $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m},\sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés. Posons*

$$S=\left\{\,q_1 \textit{ divisant } d \mid \left(\frac{m}{q_1}\right)=1 \textit{ et } q_1 \textit{ premier impair de } \mathbb{Q}\,\right\}.$$

S'il existe un premier q tel que $q\equiv 3 \pmod 4$ et $q|d$, alors $e=1$ ou $e=2$. Plus précisément:

1) *Si $m\equiv 2$ ou $5 \pmod 8$, alors $\operatorname{rang}(C_{2,K})=r-2$ si et seulement si $\left(\frac{-1}{q_1}\right)=1$ pour tout $q_1\in S$.*
2) *Si $m\equiv 1 \pmod 8$, alors $\operatorname{rang}(C_{2,K})=r-2$ si et seulement si $\left(\frac{-1}{q_1}\right)=1$ pour tout $q_1\in S$ et*

$$\left[\,d=2c \textit{ avec } \left(\frac{-1}{c}\right)=1\right] \textit{ ou bien } d\equiv 1 \pmod 4.$$

Théorème 2 [Azizi et Mouhib 2001]. *Soient m un premier $\equiv 1$ ou $2 \pmod 4$ et $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m},\sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés, qui n'est pas divisible par les premiers $\equiv -1 \pmod 4$. Alors $e=0$ ou $e=1$; plus précisément:*

1) *Si $m=p\equiv 1 \pmod 4$, alors $\operatorname{rang}(C_{2,K})=r-1$ si et seulement si pour chaque $q|d$ tel que $\left(\frac{q}{p}\right)=1$ on a $\left(\frac{q}{p}\right)_4=\left(\frac{p}{q}\right)_4$ et*

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4=(-1)^{(p-1)/8} \textit{ si } p\equiv 1 \pmod 8 \textit{ et } d=2c.$$

2) *Si $m=2$, alors $\operatorname{rang}(C_{2,K})=r-1$ si et seulement si pour chaque $q|d$ tel que $q\equiv 1 \pmod 8$ on a $\left(\frac{2}{q}\right)_4=(-1)^{(q-1)/8}$.*

Dans le cas où $m\in\{q,2q,q'q''\}$ où q, q' et q'' sont des premiers tels que $q\equiv q'\equiv q''\equiv -1 \pmod 4$, on vérifie facilement que l'unité fondamentale ε_m de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ vérifie $\varepsilon_m=a_m u^2$ où $u\in\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ et $a_m\in\mathbb{N}$ est défini comme suit: $a_m=2$ si $m=q$ ou $m=2q$ et $a_m=q'$ ou $a_m=q''$ si $m=q'q''$. Alors en utilisant les propriétés du symbole du reste normique (voir par exemple [Hasse 1930]), on démontre les deux théorèmes suivants:

Théorème 3. *Soient q, q' et q'' des premiers tels que $q \equiv q' \equiv q'' \equiv -1 \pmod 4$, m un entier naturel tel que $m \in \{q, 2q\}$ ou $m = q'q'' \equiv 5 \pmod 8$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés. On pose*

$$S = \left\{ q_1 \textit{ divisant } d \mid \left(\tfrac{m}{q_1}\right) = 1 \textit{ et } q_1 \textit{ premier impair de } \mathbb{Q} \right\}.$$

Alors :

$e = 0$ si et seulement si $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = \left(\frac{a_m}{q_1}\right) = 1$ pour tout $q_1 \in S$.

$e = 2$ si et seulement si il existe des premiers q_1, q_2, q_3 de S tels que $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = \left(\frac{a_m}{q_1}\right) = -1$ et $\left(\frac{-1}{q_3}\right) \neq \left(\frac{a_m}{q_3}\right)$.

Preuve. On suppose que $m \in \{q', 2q'\}$ ou $m = q'q'' \equiv 5 \pmod 8$. Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ qui se ramifie dans K.

Calculons le symbole du reste normique $\left(\frac{-1,\, d}{\mathcal{P}}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus d'un premier q_1 impair tel que $\left(\frac{m}{q_1}\right) = -1$, alors d'après les propriétés du symbole du reste normique (voir par exemple [Hasse 1930]), on a

$$\left(\frac{-1,\ d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{\mathbb{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/Q}(-1),\ d}{q_1}\right) = 1.$$

Si $\mathcal{P}$ est au dessus de q_1 où $q_1 \in S$, alors $\left(\frac{-1,\, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{d,\, -1}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1}{\mathcal{P}}\right)^{v_{\mathcal{P}}(d)} = \left(\frac{-1}{q_1}\right)$ où $v_{\mathcal{P}}(d)$ désigne la valuation d'indice $\mathcal{P}$ appliquée à l'idéal engendré par (d) dans $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus de 2, alors $\mathcal{P}$ est le seul premier de k qui est au dessus de 2. Ainsi, d'après [Hasse 1930], on a

$$\left(\frac{-1,\ d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{\mathbb{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(-1),\ d}{2}\right) = 1.$$

On en déduit alors que -1 est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ si et seulement si pour tout premier $q_1 \in S$, on a $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = 1$.

Calculons le symbole du reste normique $\left(\frac{\varepsilon_m,\, d}{\mathcal{P}}\right)$. On sait que $\varepsilon_m = a_m u^2$ où $u \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Ainsi on a $\left(\frac{\varepsilon_m,\, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{a_m,\, d}{\mathcal{P}}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus de q_1 où q_1 est un premier impair tel que $\left(\frac{m}{q_1}\right) = -1$, on trouve que

$$\left(\frac{\varepsilon_m,\ d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m}/\mathbb{Q}}(\varepsilon_m),\ d}{q_1}\right) = 1.$$

Si $\mathcal{P}$ est au dessus de q_1 où $q_1 \in S$, alors $\left(\frac{\varepsilon_m,\, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{a_m,\, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{d,\, a_m}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{a_m}{\mathcal{P}}\right)^{v_{\mathcal{P}}(d)} = \left(\frac{a_m}{q_1}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus de 2, on trouve que $\left(\frac{\varepsilon_m,\, d}{\mathcal{P}}\right) = 1$. Ainsi ε_m est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ si et seulement si pour tout $q_1 \in S$, on a $\left(\frac{a_m}{q_1}\right) = 1$. Ce qui termine la preuve du théorème. □

Théorème 4. *Soient q' et q'' deux premiers tels que $q' \equiv q'' \equiv -1 \pmod 4$, m un entier naturel tel que $m = q'q'' \equiv 1 \pmod 8$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés. On pose*

$$S = \left\{ q_1 \textit{ divisant } d \mid \left(\tfrac{m}{q_1}\right) = 1 \textit{ et } q_1 \textit{ premier impair de } \mathbb{Q} \right\}.$$

Alors $e=0$ *si et seulement si* $\left(\frac{-1}{q_1}\right)=\left(\frac{a_m}{q_1}\right)=1$ *pour tout* $q_1\in S$ *et*

$$d\equiv 1 \pmod 4 \text{ ou } d=2c \text{ tel que } \left(\frac{-1}{c}\right)=\left(\frac{2}{q'}\right)=1.$$

$e=2$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée* :

- $d\equiv -1 \pmod 4$ *et* $\exists\, q_1\in S$ *tel que* $\left(\frac{-1}{q_1}\right)\neq\left(\frac{a_m}{q_1}\right)$.
- $d\equiv 1 \pmod 4$ *et* $\exists q_1,q_2,q_3\in S$ *tels que* $\left(\frac{-1}{q_1}\right)=\left(\frac{a_m}{q_2}\right)=-1$ *et* $\left(\frac{-1}{q_3}\right)\neq\left(\frac{a_m}{q_3}\right)$.
- $d=2c$ *et*
  $\left(\frac{2}{q'}\right)=-\left(\frac{-1}{c}\right)=1$ *et* $\exists q_1\in S$ *tel que* $\left(\frac{-1}{q_1}\right)\neq\left(\frac{a_m}{q_1}\right)$ *ou*
  $\left(\frac{-1}{c}\right)=-\left(\frac{2}{q'}\right)=1$ *et* $\exists q_1\in S$ *tel que* $\left(\frac{-1}{q_1}\right)=-1$ *ou*
  $\left(\frac{-1}{c}\right)=\left(\frac{2}{q'}\right)=1$ *et* $\exists q_1,q_2,q_3\in S$ *tels que* $\left(\frac{-1}{q_1}\right)=\left(\frac{a_m}{q_2}\right)=-1$ *et* $\left(\frac{-1}{q_3}\right)\neq\left(\frac{a_m}{q_3}\right)$.

Preuve. On suppose que $m=q'q''\equiv 1 \pmod 8$. Soit $\mathcal{P}$ un premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ qui se ramifie dans K. Calculons $\left(\frac{-1,\,d}{\mathcal{P}}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus d'un premier q_1 impair, alors comme dans le théorème 3, on trouve que:

Si $\left(\frac{m}{q_1}\right)=-1$, on a $\left(\frac{-1,\,d}{\mathcal{P}}\right)=1$. Si $\left(\frac{m}{q_1}\right)=1$, on a $\left(\frac{-1,\,d}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{-1}{q_1}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus de 2, on raisonne comme suit:

Supposons que $d\equiv 3 \pmod 4$, alors on a $\left(\frac{-1,\,q'd}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{-1,\,q'}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{-1,\,d}{\mathcal{P}}\right)$. Comme $q'd\equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathcal{P}$ ne se ramifie pas dans $\mathbb{Q}(\sqrt{m},\sqrt{q'd})$; par suite $\left(\frac{-1,\,q'd}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{q'd}{\mathcal{P}}\right)^{v_{\mathcal{P}}(-1)}=1$. Ainsi on a $\left(\frac{-1,\,d}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{-1,\,q'}{\mathcal{P}}\right)$. On se ramène à calculer le symbole $\left(\frac{-1,\,q'}{\mathcal{P}}\right)$. Soient le corps $L=\mathbb{Q}(\sqrt{q'},\sqrt{q''})$ et $C_{2,L}$ son 2-groupe de classes. D'après le théorème 3, on a $\operatorname{rang}(C_{2,L})=0$, c'est à dire le nombre de classes de L est impair. On a $L=\mathbb{Q}(\sqrt{m},\sqrt{q'})$. Si on note par r' le nombre des premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans L et par e' l'entier associé à l'extension $L/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, défini par $2^{e'}=[E:E\cap\mathcal{N}(L)^*]$, alors on a $\operatorname{rang}(C_{2,L})=r'-1-e'=1-e'=0$, ainsi $e'=1$. Par suite -1 ou ε_m n'est pas une norme dans l'extension $L/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. On a

$$\left(\frac{\varepsilon_m,\,q'}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{q',\,q'}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{-1,\,q'}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{-q',\,q'}{\mathcal{P}}\right).$$

Or $\left(\frac{-q',\,q'}{\mathcal{P}}\right)=1$; alors $\left(\frac{\varepsilon_m,\,q'}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{-1,\,q'}{\mathcal{P}}\right)$. Par suite $\left(\frac{-1,\,q'}{\mathcal{P}}\right)=-1$, et on a $\left(\frac{-1,\,d}{\mathcal{P}}\right)=-1$.

Supposons que $d=2c$ avec c impair. On a

$$\left(\frac{-1,\,d}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{-1,\,2}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{-1,\,c}{\mathcal{P}}\right).$$

On sait que $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m},\sqrt{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{m})}(\varepsilon_2)=-1$, donc $\left(\frac{-1,\,2}{\mathcal{P}}\right)=1$. Si $c\equiv 3 \pmod 4$, alors $\left(\frac{-1,\,c}{\mathcal{P}}\right)=-1$. Si $c\equiv 1 \pmod 4$, alors $\left(\frac{-1,\,c}{\mathcal{P}}\right)=1$. On tire que -1 est norme dans l'extension K/k si et seulement si pour tout premier q_1 de S on a $\left(\frac{-1}{q_1}\right)=1$ et $\left[\,d\equiv 1 \pmod 4 \text{ ou } d=2c \text{ tel que } \left(\frac{-1}{c}\right)=1\,\right]$.

Calculons $\left(\frac{\varepsilon_m,\,d}{\mathcal{P}}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus d'un premier q_1 tel que $\left(\frac{m}{q_1}\right)=-1$, alors $\left(\frac{\varepsilon_m,\,d}{\mathcal{P}}\right)=1$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus d'un premier q_1 tel que $q_1\in S$, on a $\left(\frac{\varepsilon_m,\,d}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{q',\,d}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{a_m}{q_1}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est au dessus de 2, on raisonne comme suit.

On suppose que $d\equiv 3 \pmod 4$; alors on a $\left(\frac{\varepsilon_m,\,d}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{q',\,d}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{q',\,-d}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{q',\,-1}{\mathcal{P}}\right)$. Or $\left(\frac{q',\,-1}{\mathcal{P}}\right)=-1$ (voir le cas précédent) et $\left(\frac{q',\,-d}{\mathcal{P}}\right)=1$ (car $-d\equiv 1 \pmod 4$)), donc $\left(\frac{\varepsilon_m,\,d}{\mathcal{P}}\right)=-1$. On suppose que $d=2c$ où c est impair; alors $\left(\frac{\varepsilon_m,\,d}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{\varepsilon_m,\,2}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{\varepsilon_m,\,c}{\mathcal{P}}\right)$.

Si $c \equiv 3 \pmod 4$, alors $\left(\frac{\varepsilon_m,\, c}{\mathcal{P}}\right) = -1$. Si $c \equiv 1 \pmod 4$, alors $\left(\frac{\varepsilon_m,\, c}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{c}{\mathcal{P}}\right)^{v_{\mathcal{P}}(\varepsilon_m)} = 1$. On a $\left(\frac{\varepsilon_m,\, 2}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{q',\, 2}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{2}{q'}\right)$, d'où $\left(\frac{\varepsilon_m,\, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1}{c}\right)\left(\frac{2}{q'}\right)$. Ainsi ε_m est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ si et seulement si pour tout premier $q_1 \in S$, on a $\left(\frac{a_m}{q_1}\right) = 1$ et $\left[\, d \equiv 1 \pmod 4 \text{ ou } d = 2c \text{ tel que } \left(\frac{-1}{c}\right) = \left(\frac{2}{q'}\right) \right]$. Par conséquent, on retrouve le théorème. $\square$

3. Capitulation des 2-classes d'idéaux de K où $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est non ramifiée

Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels premiers entre eux et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$. On suppose que l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est non ramifiée, que $[K^{(*)} : K] = 2$ et que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, on donne une méthode générale qui permet de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur d_1 et d_2 pour que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et on donne un moyen qui permet de chercher la structure du groupe G. On termine par donner une application aux résultats trouvés.

Étude des conditions pour lesquels $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. On note par $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})}$ le 2-groupe de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$.

Théorème 5. *On garde les notations précédentes et on suppose que l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est non ramifiée, $[K^{(*)} : K] = 2$ et $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors il existe un corps biquadratique L dont le 2-groupe de classes est cyclique tel que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 | h(L)$.

Preuve. D'après [Azizi et Mouhib $\geq$ 2008], le groupe $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})}$ est de type $(2, 2^2)$ ou bien de type $(2, 2)$.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})}$ est de type $(2, 2^2)$, alors $K_2^{(1)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$. Comme K est une extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ dont la 2-partie du nombre de classes est égale à 4, alors d'après [Benjamin et al. 1998], la suite des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ s'arrête en $K_2^{(1)}$. Par conséquent on a $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})}$ est de type $(2, 2)$, alors $K^{(*)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$. D'après la théorie des groupes, il existe une sous-extension propre de $K^{(*)}/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ notée L telle que le 2-groupe de classes de L est cyclique. D'autre part et comme $K^{(*)}/L$ est une extension non ramifiée, L et $K^{(*)}$ ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. Par suite $h(K_2^{(1)}) = \frac{1}{2} h(K^{(*)}) = \frac{1}{4} h(L)$. On en déduit que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 | h(L)$, ce qui achève la preuve. $\square$

Le théorème 1 nous permet de transformer l'étude des conditions pour lesquels $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ à une étude de la 2-partie du nombre de classes du corps L. Un tel corps est bien un corps biquadratique de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{d'}, \sqrt{d''})$ où d' et d'' sont deux entiers premiers entre eux divisant $d_1 d_2$. Or $K^{(*)}/L$ est bien une extension de degré 2 et $K^{(*)}$ est le corps de genres de L; par suite et à l'aide de la théorie des genres; l'un des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{d'})$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{d''})$ est de nombre de classes impair. Donc L contient un corps quadratique de nombres de classes impair et par suite L peut être déterminer à partir des théorèmes 1, 2, 3 et 4. Ainsi, à l'aide des résultats connus sur la 2-partie du nombre de classes des corps quadratiques (voir par exemple [Kaplan 1976; Kučera 1995; Benjamin et Snyder 1995]) et en utilisant la formule de Wada sur le nombre de classes d'un composé de corps quadratiques (voir [Wada 1966]), on peut déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur d_1 et d_2 pour lesquels $8|h(L)$ et par suite $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$.

Structure du groupe $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. On sait que $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Par conséquent G est abélien.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $K^{(*)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$. De plus $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$. On se ramène ainsi à des questions de capitulation sur des corps quadratiques. En utilisant [Benjamin et Snyder 1995] et [Couture et Derhem 1992], on trouve la structure du groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2}))$. Comme G est un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2}))$, la structure du groupe G est bien déterminée.

Dans la suite on va donner une application à cette étude pour illustrer la méthode qu'on vient de décrire.

Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ où $d_1 = p$ et $d_2 = p'q_1q_2$. Les entiers naturels d_1 et d_2 sont premiers entre eux et on a $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'}, \sqrt{q_1q_2})$ et par suite $[K^{(*)} : K] = 2$.

Théorème 6 [Azizi et Mouhib 2001]. *Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'q_1q_2})$. Alors le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$ si et seulement si l'un des cas suivants est vérifié :*

1) $\left(\frac{p}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{q_1}\right) = -\left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$ *et* $\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$.

2) $-\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$ *et* $\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$.

3) $-\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$ *et* $\left(\frac{p'}{q_1}\right) = \left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$.

4) $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1,\ \left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1,\ \left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p'}{q_1}\right)$.

5) $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1,\ \left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1,\ \left(\frac{p}{q_1}\right) \neq \left(\frac{p'}{q_1}\right)$ *et* $\left[\left(\frac{p'}{q_1}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1\right]$.

Dans ce qui suit, on va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K, en distinguant les cinq cas du théorème 6.

Étude des conditions pour lesquels $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. Nous aurons besoin de quelques résultats sur les unités qu'on va démontrer dans ce qui suit:

Soient $L = \mathbb{Q}(\sqrt{A}, \sqrt{B})$ un corps biquadratique réel et Q_L l'indice du groupe des unités de L modulo son sous-groupe engendré par les unités des trois sous-corps quadratiques de L. On suppose que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est engendré par σ et τ et que $\mathbb{Q}(\sqrt{A}) = \mathrm{inv}\,(\sigma)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{B}) = \mathrm{inv}\,(\tau)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{AB}) = \mathrm{inv}\,(\sigma\tau)$. D'après une idée qui revient à Hergoltz, on sait que le carré d'une unité ε de L vérifie

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon\varepsilon^\sigma)(\varepsilon\varepsilon^\tau)(\varepsilon^\sigma\varepsilon^\tau)^{-1},$$

c'est-à-dire il est un produit d'unités dans $\mathbb{Q}(\sqrt{A})$, dans $\mathbb{Q}(\sqrt{B})$ et dans $\mathbb{Q}(\sqrt{AB})$ (voire $\varepsilon\varepsilon^\sigma$, $\varepsilon\varepsilon^\tau$, $\varepsilon^\sigma\varepsilon^\tau$ respectivement). Ainsi, l'indice Q_L est égal à 1, 2, 4 ou 8.

T. Kubota [1956] a démontré que $Q_L \in \{1, 2, 4\}$. S'il existe exactement r relations quadratiques et indépendantes entre les unités ε_1, ε_2 et ε_3 des trois sous-corps quadratiques de L, alors $Q_L = 2^r$.

Pour m entier naturel, on désigne dans tout ce quit suit par $e(m)$ la norme par rapport à l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}$ de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Lemme 1. *Soient q_1, q_2, p, p' des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$. On suppose que $e(pp') = 1$; alors $Q_L = 2$.*

Preuve. Soit ε_1 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$, ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$ et ε_3 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})$. Comme $e(q_1q_2) = e(pp') = e(pp'q_1q_2) = 1$, on a, d'après [Cohn 1978, théorème 11.23, p. 106], les trois relations suivantes:

$$\sqrt{\varepsilon_1} = y_1\sqrt{q_1} + y_2\sqrt{q_2}, \quad \text{avec } y_1, y_2 \in \mathbb{Q};$$
$$\sqrt{\varepsilon_2} = t_1\sqrt{p} + t_2\sqrt{p'}, \quad \text{avec } t_1, t_2 \in \mathbb{Q};$$
$$\sqrt{\varepsilon_3} = v_1\sqrt{m} + v_2\sqrt{n}, \quad \text{avec } v_1, v_2 \in \mathbb{Q},\ m, n \in \mathbb{Z},\ mn = pp'q_1q_2.$$

Donc, il existe trois entiers naturels uniques i, j, k tels que $\{i, j, k\} \subset \{0, 1\}$, $i + j + k \neq 0$ et $\sqrt{\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j\varepsilon_3^k} \in K$. Par conséquent $Q_L = 2$. $\square$

Lemme 2. *Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$. On suppose que $e(pp') = -1$,*

$$\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1 \quad \textit{et} \quad \left(\frac{p}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{q_1}\right) = -\left(\frac{p}{q_2}\right) = 1.$$

Alors $Q_L = 1$.

Preuve. Comme $e(pp') = -1$, l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$ n'est pas un carré dans L. Soient ε_1 et ε_2 les unités fondamentales respectives des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})$. On sait d'après la preuve du lemme 1 qu'il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = y_1\sqrt{q_1} + y_2\sqrt{q_2}. \tag{3–1}$$

Soit w un entier naturel sans facteurs carrés tel que $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})/\mathbb{Q}}(1+\varepsilon_2) = wx^2$ où x est un entier naturel. D'après [Benjamin et Snyder 1995], on a $w = p'q_1q_2$; par suite il existe deux entiers naturels b et c tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{c}{2}\sqrt{p'q_1q_2} + \frac{b}{2}\sqrt{p}.$$

De cela et de (3–1) on tire que les unités ε_1, ε_2 et $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ne sont pas des carrés dans L. Par conséquent $Q_L = 1$. □

Lemme 3. *Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$. On suppose que $e(pp') = -1$, $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, $\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$, et $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p'}{q_1}\right)$; alors $Q_L = 2$.*

Preuve. Soient ε_1 et ε_2 les unités fondamentales respectives des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})$. D'après la preuve du lemme 1, il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = y_1\sqrt{q_1} + y_2\sqrt{q_2}.$$

Soit w l'entier naturel défini dans la preuve du lemme 2. D'après [Benjamin et Snyder 1995], on a $w = q_1$ ou $w = q_2$; par suite il existe deux entiers naturels c et d tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{c}{2}\sqrt{w} + \frac{d}{2}\sqrt{\frac{pp'q_1q_2}{w}}.$$

Par suite, on a $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in L$, d'où $Q_L = 2$. □

Lemme 4. *Soient q, p deux premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$. Alors :*

1) $e(2p) = 1 \Longrightarrow Q_L = 4$.
2) $e(2p) = -1 \Longrightarrow Q_L = 2$.

Preuve. 1) Soient ε_1, ε_2 et ε_3 les unités fondamentales de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ respectivement. On vérifie facilement qu'il existe deux nombres rationnels a_1 et a_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{2q}. \tag{3–2}$$

Comme $e(2p) = 1$, il existe deux nombres rationnels b_1 et b_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{p}. \tag{3–3}$$

D'autre part il existe deux nombres rationnels c_1 et c_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_3} = c_1\sqrt{m} + c_2\sqrt{n} \tag{3–4}$$

où m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que $mn = 2pq$.

De (3–2) et (3–3), on déduit que $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in L$ et de (3–2) et (3–4), on déduit que $\sqrt{\varepsilon_3} \in L$ ou bien $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \in L$. Par conséquent, on a $Q_L = 4$.

2) On suppose que $e(2p) = -1$. D'après 1), on a $\sqrt{\varepsilon_1} \notin L$ et $\sqrt{\varepsilon_3} \in L$ ou bien $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \in L$. Par suite on a $Q_L = 2$. □

Lemme 5. *Soient p, q, q' des premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. On suppose que $\left(\frac{q'}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$; alors $Q_K = 2$.*

Preuve. Soit ε_1 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Comme $e(q) = 1$, il existe deux nombres rationnels t_1 et t_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = t_1\sqrt{2} + t_2\sqrt{2q}. \tag{3–5}$$

Soit ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq'})$. Comme $e(pq') = 1$, il existe deux nombres rationnels v_1 et v_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = v_1\sqrt{m} + v_2\sqrt{n}, \tag{3–6}$$

et m, n deux entiers naturels tels que $mn \in \{pq', 4pq'\}$.

Soit $\varepsilon_3 = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{pqq'}$ où x et y sont des entiers, l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$. On a $e(pqq') = 1$; alors $(x-2)(x+2) = pqq'y^2$. Comme $\left(\frac{q'}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que

$$\begin{cases} x \pm 2 = q'y_1^2 & \text{où } 2y_1y_2 = y, \\ x \mp 2 = pqy_2^2. \end{cases}$$

En posant $W = \sqrt{q'}y_1 + \sqrt{pq}y_2$, on trouve que $W^2 = 4\varepsilon_3$. Ainsi

$$\sqrt{\varepsilon_3} = \frac{y_1}{2}\sqrt{q'} + \frac{y_2}{2}\sqrt{pq}. \tag{3–7}$$

De (3–5), (3–6) et (3–7), on a $\sqrt{\varepsilon_1} \notin K$, $\sqrt{\varepsilon_3} \notin K$. De plus, il existe trois entiers naturels i, j, k uniques tels que $\{i, j, k\} \subset \{0, 1\}$, $i + j + k \neq 0$ et $\sqrt{\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j\varepsilon_3^k} \in K$. Ainsi, on a $Q_K = 2$. □

Théorème 7. *Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'q_1q_2})$.*

- *On suppose que K vérifie les conditions des cas 1 ou 5 du théorème 6; alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4 = 1$.*
- *On suppose que K vérifie les conditions du cas 2 du théorème 6; alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{pq_1q_2})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 | h(pq_1q_2)$ ou $\left[\, Q_L = 2 \text{ et } h(pq_1q_2) \equiv 4 \pmod 8 \,\right]$.*
- *On suppose que K vérifie les conditions du cas 3 du théorème 6; alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{pq_1q_2})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 | h(pq_1q_2)$ ou $\left[\, Q_L = 2 \text{ et } h(pq_1q_2) \equiv 4 \pmod 8 \,\right]$.*
- *On suppose que K vérifie les conditions du cas 4 du théorème 6; alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$.*

Preuve. On note par ε_1 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ et par ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})$. Soit w un entier naturel sans facteurs carrés tel que $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})/\mathbb{Q}}(1 + \varepsilon_2) = wx^2$ où x est un entier naturel.

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 1 du théorème 6. Donc
$$\left(\tfrac{p}{p'}\right)=-\left(\tfrac{p}{q_1}\right)=-\left(\tfrac{p}{q_2}\right)=1 \quad \text{et} \quad \left(\tfrac{p'}{q_1}\right)\left(\tfrac{p'}{q_2}\right)=-1.$$
D'après le théorème 4, le 2-groupe de classes de $L=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{pp'})$ est cyclique. On sait d'après le théorème 5 que $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(L)$. D'après [Kaplan 1976], $h(pp'q_1q_2)\equiv 4 \pmod 8$ et $e(pp'q_1q_2)=1$. Si $\left(\tfrac{p}{p'}\right)_4\neq\left(\tfrac{p'}{p}\right)_4$, alors, d'après [Kučera 1995], on a $h(pp')\equiv 2 \pmod 4$ et $e(pp')=1$. D'autre part, d'après le lemme 1, on a $Q_L=2$, par suite, d'après [Wada 1966], on a
$$h(L)=\frac{Q_Lh(q_1q_2)h(pp')h(pp'q_1q_2)}{4}\equiv 4 \pmod 8.$$
Ainsi on a $K_2^{(1)}=K_2^{(2)}$. Si $\left(\tfrac{p}{p'}\right)_4=\left(\tfrac{p'}{p}\right)_4=-1$, alors d'après [Kučera 1995], on a $h(pp')\equiv 4 \pmod 8$ et $e(pp')=-1$. D'autre part, d'après le lemme 2, on a $Q_L=1$ et donc $h(L)\equiv 4 \pmod 8$. Si $\left(\tfrac{p}{p'}\right)_4=\left(\tfrac{p'}{p}\right)_4=1$, alors si $e(pp')=-1$, on a $8|h(pp')$, d'après [Kučera 1995]; par suite $8|h(L)$. Ainsi, on a $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$. Si $e(pp')=1$, alors, d'après le lemme 1, on a $Q_L=2$; par suite $8|h(L)$. Donc
$$K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)} \iff \left(\tfrac{p}{p'}\right)_4=\left(\tfrac{p'}{p}\right)_4=1.$$

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 2 du théorème 6. Donc
$$-\left(\tfrac{p}{p'}\right)=\left(\tfrac{p}{q_1}\right)=\left(\tfrac{p}{q_2}\right)=1 \quad \text{et} \quad \left(\tfrac{p'}{q_1}\right)\left(\tfrac{p'}{q_2}\right)=-1.$$
D'après le théorème 1, le 2-groupe de classes de $L=\mathbb{Q}(\sqrt{p'},\sqrt{pq_1q_2})$ est cyclique. Or, d'après [Kaplan 1976], on a $h(pp'q_1q_2)\equiv 4 \pmod 8$ et $4|h(pq_1q_2)$, donc on a
$$K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)} \iff 8|h(pq_1q_2) \text{ ou bien } \big[h(pq_1q_2)\equiv 4 \pmod 8 \text{ et } Q_L=2\big].$$

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 3 du théorème 6. Donc
$$-\left(\tfrac{p}{p'}\right)=\left(\tfrac{p}{q_1}\right)=\left(\tfrac{p}{q_1}\right)=1 \quad \text{et} \quad \left(\tfrac{p'}{q_1}\right)=\left(\tfrac{p'}{q_2}\right)=-1.$$
D'après le théorème 1, le 2-groupe de classes de $L=\mathbb{Q}(\sqrt{p'},\sqrt{pq_1q_2})$ est cyclique. Ce cas est similaire au cas 2; par suite, on a
$$K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)} \iff 8|h(pq_1q_2) \text{ ou bien } [h(pq_1q_2)\equiv 4 \pmod 8 \text{ et } Q_L=2].$$

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 4 du théorème 6. Donc
$$\left(\tfrac{p}{p'}\right)=1,\quad \left(\tfrac{p}{q_1}\right)\left(\tfrac{p}{q_2}\right)=-1,\quad \left(\tfrac{p'}{q_1}\right)\left(\tfrac{p'}{q_2}\right)=-1,\quad \left(\tfrac{p}{q_1}\right)=\left(\tfrac{p'}{q_1}\right).$$
D'après le théorème 4, le 2-groupe de classes de $L=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{pp'})$ est cyclique. D'après [Kaplan 1976], on a $h(pp'q_1q_2)\equiv 4 \pmod 8$. Si $\left(\tfrac{p}{p'}\right)_4\neq\left(\tfrac{p'}{p}\right)_4$, on trouve que $K_2^{(1)}=K_2^{(2)}$, comme dans le cas 1 du théorème 6. Dans le cas contraire, d'après [Kučera 1995], on a $4|h(pp')$ et on distingue les cas suivants:

Si $e(pp')=-1$, d'après le lemme 3, on a $Q_L=2$; par suite $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$.

Si $e(pp')=1$, d'après le lemme 1, on a $Q_L=2$; par suite $8|h(L)$. Par conséquent
$$K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)} \iff \left(\tfrac{p}{p'}\right)_4=\left(\tfrac{p'}{p}\right)_4.$$

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 5 du théorème 6. Donc

$$\left(\frac{p}{p'}\right)=1,\quad \left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right)=-1,\quad \left(\frac{p}{q_1}\right)\neq\left(\frac{p'}{q_1}\right),\quad \left[\left(\frac{p'}{q_1}\right)=-1 \text{ ou } \left(\frac{p'}{q_2}\right)=-1\right].$$

D'après le théorème 4, le 2-groupe de classes de $L=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{pp'})$ est cyclique. Ce cas est similaire au cas 1, donc on a

$$K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)} \Longleftrightarrow \left(\frac{p}{p'}\right)_4=\left(\frac{p'}{p}\right)_4=1. \qquad \square$$

***Structure du groupe* $G=\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$.** On a prouvé précédemment (page 23) que la détermination de la structure du groupe G revient à chercher la structure du groupe $\mathrm{Gal}\big(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2d})\big)$. Alors en utilisant [Couture et Derhem 1992] et [Benjamin et Snyder 1995], on retrouve le théorème suivant: On désigne par w l'entier naturel sans facteurs carrés défini par $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pq_1q_2})/\mathbb{Q}}(1+\varepsilon_{pq_1q_2})=wn^2$ où $\varepsilon_{pq_1q_2}$ est l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq_1q_2})$ et n un entier naturel.

Théorème 8. *Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p\equiv p'\equiv -q_1\equiv -q_2\equiv 1 \pmod 4$ et $K=\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{p'q_1q_2})$.*

- *On suppose que K vérifie les conditions du cas 1 du théorème 6 et $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$; alors G est diédral.*
- *On suppose que K vérifie les conditions du cas 2 du théorème 6 et $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$; alors G est quaternionique si $w\in\{pq_1, pq_2\}$, sinon G est diédral.*
- *On suppose que K vérifie les conditions du cas 3 du théorème 6 et $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$; alors G est quaternionique si $w=p$, sinon G est diédral.*
- *On suppose que K vérifie les conditions du cas 4 du théorème 6 et $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$; alors G est quaternionique si $e(2p)=-1$, sinon G est diédral.*
- *On suppose que K vérifie les conditions du cas 5 du théorème 6 et $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$; alors G est diédral.*

Preuve. On utilise plusieurs fois des résultats contenus dans [Benjamin et Snyder 1995].

Dans le cas 1 du théorème 6, on a $h(pp'q_1q_2)\equiv 4 \pmod 8$. Si $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$, alors $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/Q(\sqrt{pp'q_1q_2}))$ est diédral et comme G est est un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/Q(\sqrt{pp'q_1q_2}))$, alors G est diédral.

Dans le cas 2 du théorème 6, on a $h(pp'q_1q_2)\equiv 4 \pmod 8$. Si $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$, alors $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/Q(\sqrt{pp'q_1q_2}))$ est quaternionique si $w\in\{pq_1, pq_2\}$, et diédral dans le cas contraire. G est d'indice 2 dans $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/Q(\sqrt{pp'q_1q_2}))$, ce qui donne le résultat.

Pour les autres cas du théorème 6, on a toujours $h(2pq_1q_2)\equiv 4 \pmod 8$, et on trouve le résultat toujours en utilisant [Benjamin et Snyder 1995]. $\square$

4. Capitulation des 2-classes d'idéaux de K où $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est ramifiée

Dans cette section, on suppose que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $[K^{(*)}:K]=2$ et l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est ramifiée. D'après [Azizi et Mouhib $\geq$ 2008], la 2-partie du nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est égale à 1 ou à 2; par suite la 2-partie du nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est égale à 2 (car sinon le nombre de classes de K serait impair). D'après [Kaplan 1976], les cas tels que $h(d_1d_2) \equiv 2 \pmod 4$ sont:

1) $d_1d_2 = 2pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$.
2) $d_1d_2 = pqq'$ où $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q'}{p}\right) = -1$.
3) $d_1d_2 = pp'$ où $p \equiv p' \equiv 1 \pmod 4$ et $h(pp') \equiv 2 \pmod 4$.
4) $d_1d_2 = 2p$ où $p \equiv 1 \pmod 4$ et $h(2p) \equiv 2 \pmod 4$.
5) $d_1d_2 = 2qq'$ où $q \equiv q' \equiv -1 \pmod 4$ et $h(2qq') \equiv 2 \pmod 4$.
6) $d_1d_2 = pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $h(pq) \equiv 2 \pmod 4$.

Les cas 3, 4 et 6 sont à rejeter car l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est supposée ramifiée.

Le cas 5 est aussi à rejeter car, d'après le théorème 3, le 2-groupe de classes de K est trivial ou cyclique, ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi ce qui reste sont les cas 1 et 2.

Afin d'avoir $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ ramifiée, K doit prendre l'une des formes suivantes:

Dans le cas 1:

$$\left[\, K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq}) \text{ ou bien } K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p}) \,\right] \text{ et } \left[\, \left(\tfrac{2}{p}\right) = -1 \text{ ou } \left(\tfrac{q}{p}\right) = -1 \,\right].$$

Dans le cas 2:

$$\left[\, K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'}) \text{ ou bien } K = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{pq}) \,\right] \text{ et } \left[\, \left(\tfrac{q}{p}\right) = -1 \text{ ou } \left(\tfrac{q'}{p}\right) = -1 \,\right].$$

Théorème 9. *Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ où d_1 et d_2 sont deux entiers naturels premiers entre eux. On suppose que l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est ramifiée et que $[K^{(*)} : K] = 2$; alors le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$ si et seulement si l'un des deux cas suivants est vérifié :*

1) *$d_1 = 2$, $d_2 = pq$ où p et q sont deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$.*
2) *$d_1 = q$, $d_2 = pq'$ où p, q et q' sont des premiers tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$.*

Preuve. 1) D'après le théorème 2, le 2-groupe de classes de K est de rang 2 si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$. Alors, dans ce qui suit, on suppose que c'est le cas. On sait d'après ce qui précède que $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$; par suite $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, et alors, d'après [Kaplan 1976], on a $h(pq) \equiv h(2pq) \equiv 2 \pmod 4$. D'autre part, d'après [Kubota 1956], on a $Q_K \in \{1, 2, 4\}$ et comme $\mathrm{rang}(C_{2,K}) = 2$, alors $4 | h(K)$ et par suite $Q_K = 4$ et $h(K) = 4$.

2) Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. D'après le théorème 3, le 2-groupe de classes de K est de rang égal à 2 si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = 1$. On suppose dans ce qui suit que c'est le cas. On sait d'après ce qui précède que $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q'}{p}\right) = -1$; par suite $\left(\frac{q'}{p}\right) = -1$, et alors, d'après [Kaplan 1976], on a $h(pq) \equiv h(2pq) \equiv 2 \pmod 4$.

D'autre part d'après [Kubota 1956], on a $Q_K \in \{1, 2, 4\}$ et comme $\operatorname{rang}(C_{2,K}) = 2$, alors $4|h(K)$ et par suite $Q_K = 4$ et $h(K) = 4$. Ainsi le théorème est démontré. □

Dans la suite on va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les deux cas du théorème 9.

Étude de la capitulation dans le cas 1 du théorème 9. Dans ce cas, on a $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$ où p et q sont deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ et $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p}, \sqrt{q})$.

Proposition 1. *Soient p, q deux premiers tels que $p \equiv -1 \pmod 4$ et que $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. Alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$.*

Preuve. Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$; alors d'après le théorème 3, le 2-groupe de classes de L est cyclique. De plus, l'extension $K^{(*)}/L$ est non ramifiée; par suite $K^{(*)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. Ainsi $h(K_2^{(1)}) = \frac{1}{2}h(K^{(*)}) = \frac{1}{4}h(L)$ et par conséquent on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(L)$. Donc on est ramené à étudier la 2-partie du nombre de classes de L. D'après [Kaplan 1976], on a $h(2pq) \equiv 2 \pmod 4$ et d'après la théorie des genres $h(q) = 1$ et $2|h(2p)$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}$; alors d'après [Kučera 1995], $h(2p) \equiv 2 \pmod 4$ et $e(2p) = 1$. D'autre part, d'après le lemme 4, on a $Q_L = 4$. Ainsi on a $h(L) \equiv 4 \pmod 8$ et donc $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$; alors, d'après [Kučera 1995], on a $4|h(2p)$. On distingue deux cas:

- On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$; alors d'après [Kučera 1995], on a:
  Si $e(2p) = -1$, alors $8|h(2p)$ et d'après le lemme 4, on a $Q_L = 2$ Par suite $Q_L = 2$ et par conséquent $8|h(L)$. Si $e(2p) = 1$, alors d'après le lemme 4, on a $Q_L = 4$ et par conséquent $8|h(L)$.
- On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = -1$; alors d'après [Kučera 1995], on a $h(2p) \equiv 4 \pmod 8$ et $e(2p) = -1$. D'après le lemme 4, $Q_L = 2$. Par suite, on a $h(L) \equiv 4 \pmod 8$, d'où $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Ainsi la proposition est démontrèe. □

Dans la suite, on va déterminer les classes engendrant le 2-groupe de classes de K. On note par O_M l'anneau des entiers d'un corps M.

Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, alors $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. De plus pour $i \in \{1, 2\}$ on a $\mathcal{P}_i O_K = Y_i^2$ où Y_i est un idéal premier de K.

Proposition 2. *Soient p, q deux premiers tels que $p \equiv -1 \pmod 4$ et que $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$; alors le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes d'idéaux de Y_1 et de Y_2.*

Preuve. On sait que le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est égal à 1. Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ils sont principaux. Or pour $i \in \{1, 2\}$ on a $\mathcal{P}_i O_K = Y_i^2$, donc les classes $[Y_1]$ et $[Y_2]$ sont des 2-classes de K. Montrons que Y_1 n'est pas principal.

On vérifie facilement que Y_1 reste inerte dans $K^{(*)}$; alors d'après la loi de réciprocité d'Artin appliquée à l'extension $K^{(*)}/K$, l'idéal Y_1 n'est pas principal. Montrons que Y_1Y_2 n'est pas principal. On a $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(Y_1Y_2) = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$. On suppose que Y_1Y_2 est principal; alors il existe une unité u de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tel que pu est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ce qui est impossible. En effet:

En utilisant le symbole du reste normique, on sait que pu est norme dans cette extension si et seulement si $\left(\frac{pu,\, pq}{\mathcal{Q}}\right) = 1$ pour tout premier $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ramifié dans K (voir [Azizi et Mouhib 2001]).

D'autre part, l'idéal premier $\mathcal{P}_1$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ se ramifie dans K et on a

$$\left(\frac{-1,\, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1,\, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\varepsilon_2,\, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon_2,\, p}{\mathcal{P}_1}\right)\left(\frac{\varepsilon_2,\, q}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon_2,\, p}{\mathcal{P}_1}\right).$$

Or, $\left(\frac{\varepsilon_2,\, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)_4(-1)^{(p-1)/8}$ d'après [Azizi et Mouhib 2001]. Comme $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$, on a $\left(\frac{\varepsilon_2,\, p}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$ et donc $\left(\frac{\varepsilon_2,\, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$. Ainsi l'unité u de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ vérifie $\left(\frac{u,\, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$. De plus, on a

$$\left(\frac{p,\, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{p,\, p}{\mathcal{P}_1}\right)\left(\frac{p,\, q}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -1.$$

D'où $\left(\frac{pu,\, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = -1$, par conséquent on a une contradiction. Ainsi Y_1Y_2 n'est pas principal et la proposition est démontrée. □

Dans la suite, on va déterminer les 2-classes de K qui capitulent dans $K^{(*)}$.

On sait que Y_1 et Y_2 restent inerte dans $K^{(*)}$, donc $Y_1 O_{K^{(*)}} = Q_1$ et $Y_2 O_{K^{(*)}} = Q_2$ où $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont deux idéaux premiers de $K^{(*)}$.

D'autre part on a $pO_L = \mathcal{Q}^2$ où $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$ et $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de L; par suite $\mathcal{Q}O_{K^{(*)}} = Y_1Y_2$.

Proposition 3. *En gardant les mêmes notations, les idéaux premiers $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont principaux si et seulement si l'idéal premier $\mathcal{Q}$ est principal.*

Preuve. On sait que si $\mathcal{Q}_1$ est principal; alors $\mathcal{Q} = \mathcal{N}_{K^{(*)}/L}(\mathcal{Q}_1)$ est principal.

Inversement, si l'idéal premier $\mathcal{Q}$ est principal, on raisonne comme suit:

On sait que le 2-groupe de classes de L est cyclique et que $K^{(*)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. D'autre part, d'après la théorie des corps de classes de Hilbert, le noyau de l'application d'Artin dans l'extension $K_2^{(2)}/L$ est réduit au groupe des idéaux fractionnaires principaux de L. Comme l'idéal premier $\mathcal{Q}$ est principal, $\mathcal{Q}$ se décompose complètement dans $K_2^{(2)}$; par suite les idéaux premiers $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ se décomposent complètement dans $K_2^{(2)}$. Comme $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$, le noyau de l'application d'Artin dans l'extension $K_2^{(2)}/K^{(*)}$ est réduit au groupe des idéaux fractionnaires principaux de $K^{(*)}$. Ainsi $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont principaux et la proposition est démontrée. □

Théorème 10. *Soient p et q deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$; alors toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$ et le groupe $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.*

Preuve. On sait que le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes d'idéaux $[Y_1]$ et $[Y_2]$ définis dans la proposition 2. Montrons que Y_1Y_2 capitule dans $K^{(*)}$.

On a $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})} = \mathcal{P}^2$ où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$; par suite $\mathcal{P}O_K = Y_1Y_2$. Ainsi, il existe deux 2-classes ambigues de K relativement à $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$, la classe triviale et la classe $[Y_1Y_2]$. Comme $K^{(*)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ est une extension abélienne et $K^{(*)}/K$ est une extension non ramifiée, $K^{(*)}$ est le 2-corps de genres relatif à l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$. On sait, d'après [Terada 1971], que toutes les 2-classes ambigues de $K^{(*)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ capitulent dans $K^{(*)}$. Ainsi la classe $[Y_1Y_2]$ capitule dans $K^{(*)}$. Montrons que Y_1 capitule dans $K^{(*)}$.

On sait que $Y_1O_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}_1$ où $\mathcal{Q}_1$ est un idéal premier de $K^{(*)}$ et que $pO_L = \mathcal{Q}^2$ où $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de L. D'après la proposition 3, Y_1 capitule dans $K^{(*)}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$ est principal. Montrons que $\mathcal{Q}$ est principal.

Soit $\varepsilon_q = x + y\sqrt{q}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Alors, d'après [Azizi 2000], $x \pm 1$ est un carré dans $\mathbb{N}$. Donc il existe deux entiers naturels y_1 et y_2 tels que $x \pm 1 = y_1^2$, $x \mp 1 = y_2^2$ et $y_1y_2 = y$; par suite $\sqrt{\varepsilon_q} = \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2q}y_2$. De plus, on a $pO_L = (\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_q})^2\varepsilon_q^{-1}O_L = \mathcal{Q}^2$. Comme $\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_q}$ est un entier de L, l'idéal $\mathcal{Q}$ est principal; par suite l'idéal $\mathcal{Q}_1$ est principal. Ainsi, toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$. Comme $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et d'après [Kisilevsky 1976], le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. □

Étude de la capitulation dans le cas 2 du théorème 9. Ce cas est similaire au cas 1, et on suit les mêmes étapes.

Dans le cas 2 du théorème 9, on a $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$ où p, q et q' sont des premiers tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$ et $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p}, \sqrt{q'})$.

Proposition 4. *Soient p, q, q' des premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. Alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(pq)$.*

Preuve. D'après le théorème 3, le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{pq})$ est cyclique. De plus, l'extension $K^{(*)}/F$ est non ramifiée, donc $K^{(*)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. Alors comme dans le cas 1 du théorème 9, on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(L)$. On est donc ramené à étudier la 2-partie du nombre de classes de L. D'après [Kaplan 1976] on a $h(qpq') = 2$ et $4|h(qp)$. D'après le lemme 5, on a $Q_L = 2$.

Si $h(pq) \equiv 4 \pmod 8$, on a $h(L) \equiv 4 \pmod 8$; par suite $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Si $8|h(pq)$, on a $8|h(L)$; par suite $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. D'où la proposition est démontrée. □

Dans la suite on va déterminer les classes engendrant le 2-groupe de classes de K. Comme $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, l'idéal premier p se décompose dans $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ et on a $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Comme p est ramifié dans K, alors $\mathcal{P}_iO_K = Y_i^2$ où Y_i est un idéal premier de K.

Proposition 5. *Soient p, q, q' des premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. Alors le 2-groupe de classes de K est engendré par $[Y_1^l]$ et $[Y_2^l]$ où l est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$.*

Preuve. Le corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ est de nombre de classes impair. Soit l le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$; alors $\mathcal{P}_1^l$ et $\mathcal{P}_2^l$ sont des idéaux principaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Par suite $[Y_1^l]$ et $[Y_2^l]$ sont des 2-classes de K. Les idéaux premiers Y_1 et Y_2 ne sont pas principaux. En effet:

On vérifie que Y_1 et Y_2 restent inerte dans $K^{(*)}$. Alors d'après la loi de réciprocité d'Artin appliquée à l'extension $K^{(*)}/K$, les idéaux premiers Y_1 et Y_2 ne sont pas principaux. Comme l est impair et l'extension $K^{(*)}/K$ est de degré 2, alors Y_1^l et Y_2^l ne sont pas principaux. Montrons que $Y_1^l Y_2^l$ est non principal.

On a $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{q})}(Y_1^l Y_2^l) = \mathcal{P}_1^l \mathcal{P}_2^l = p^l O_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})}$. On suppose que $Y_1^l Y_2^l$ est principal; alors il existe une unité u de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ tel que $p^l u$ est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Ce qui est impossible. En effet:

Comme dans le cas 1, en utilisant le symbole du reste normique, on a:

l'idéal $\mathcal{P}_1$ est un premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ ramifié dans K. On a $\left(\frac{-1,\, pq'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1,\, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{\varepsilon_q,\, pq'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon_q,\, p}{\mathcal{P}_1}\right)$. D'autre part, d'après la preuve du théorème 10, il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que $\sqrt{\varepsilon_q} = y_1\sqrt{2} + y_2\sqrt{2q}$; par suite $\varepsilon_q = 2v^2$ où v est un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ et on a $\left(\frac{\varepsilon_q,\, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{2,\, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = 1$. Ainsi $\left(\frac{u,\, pq'}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$ et de plus

$$\left(\frac{p^l,\, pq'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{p^l,\, p}{\mathcal{P}_1}\right)\left(\frac{p^l,\, q'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{q'}{p}\right)^l = -1.$$

Donc on a une contradiction. Par conséquent la proposition est démontrée. □

Dans la suite on va déterminer les 2-classes de K qui capitulent dans $K^{(*)}$.

On sait que le 2-groupe de classes de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$ est engendré par $[Y_1^l]$ et $[Y_2^l]$ où l est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. On pose $Y_1 O_{K^*} = \mathcal{Q}_1$ et $Y_2 O_{K^*} = \mathcal{Q}_2$ où $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont deux idéaux premiers de $K^{(*)}$. D'autre part, on a $q O_L = \mathcal{Q}^2$ où $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{pq})$ et $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de L.

Proposition 6. *En gardant les mêmes notations, $\mathcal{Q}$ est principal si et seulement si $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_1$ sont principaux.*

Preuve. Le corps $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{pq})$ est de 2-groupe de classes cyclique, alors la preuve de la proposition 3 reste valable ici. □

Théorème 11. *Soient p, q et q' des premiers tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. On suppose que $8|h(pq')$; alors toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$ et le groupe $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.*

Preuve. On sait, d'après la proposition 5, que le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes $[Y_1^l]$ et $[Y_1^l]$. Montrons que $Y_1^l Y_2^l$ capitule dans $K^{(*)}$. Comme dans le cas 1 du théorème 9, on trouve que $[Y_1^l Y_2^l]$ est la seule 2-classe ambigue non triviale relativement à l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$ et $K^{(*)}$ est le 2-corps de genres relatif de l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$. D'après [Terada 1971], $Y_1^l Y_2^l$ capitule dans $K^{(*)}$. Montrons que Y_1 capitule dans $K^{(*)}$.

On sait que $Y_1 O_{K^{(*)}} = \mathfrak{Q}_1$ où $\mathfrak{Q}_1$ est un idéal premier de $K^{(*)}$ et que $pO_L = \mathfrak{Q}^2$ où $\mathfrak{Q}$ est un idéal premier de L. D'après la proposition 6, Y_1 capitule dans $K^{(*)}$ si et seulement si $\mathfrak{Q}$ est principal. Montrons que $\mathfrak{Q}$ est principal.

Soit $\varepsilon_{pqq'}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$. Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$, il existe, d'après le lemme 5, deux entiers naturels y_1 et y_2 tels que $\sqrt{\varepsilon_{pqq'}} = \frac{1}{2}y_1\sqrt{q} + \frac{1}{2}y_2\sqrt{pq'}$. Par conséquent on a

$$pO_L = (\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_{pqq'}})^2 \varepsilon_{pqq'}^{-1} O_L = \mathfrak{Q}^2.$$

Comme $\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_{pqq'}}$ est un entier de L, l'idéal $\mathfrak{Q}$ est principal. Par suite $\mathfrak{Q}_1^l$ et $\mathfrak{Q}_2^l$ sont principaux. Ainsi, toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$. De plus, comme $8|h(L)$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et d'après [Kisilevsky 1976], le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. □

Conclusion. Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux, $K = Q(\sqrt{d_1 d_2})$, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K et $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$. On suppose que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $K^{(*)} \neq K_2^{(1)}$ et l'extension $K/Q(\sqrt{d_1 d_2})$ est ramifiée. Alors il existe toujours une sous-extension propre de $K_2^{(1)}/K$ où toutes les 2-classes de K capitulent. Plus précisément le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien ou diédral.

Exemples numériques. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ où d_1 et d_2 sont deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux tels que $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est ramifiée. On suppose que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $K^{(*)} \neq K_2^{(1)}$. Soit alors L le corps biquadratique contenu dans $K^{(*)}$ tel que le 2-groupe de classes de L est cyclique et l'extension $K^{(*)}/L$ est non ramifiée.

On sait, d'après le théorème 9, qu'il existe deux cas de corps K dont le 2-groupe de classes est de type (2, 2). On donne des exemples numériques corréspondant à chaque cas. Dans la suite p, q, q' sont des premiers différents vérifiant $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$.

Cas 1) $\boldsymbol{d_1 = 2}$ *et* $\boldsymbol{d_2 = pq}$ *où* $\boldsymbol{\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1}$.

- Soient $p = 113$ et $q = 3$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$ et $h(2p) = 8$. De plus on a $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$ et $e(2p) = -1$; par suite $Q_L = 2$. Ainsi d'après la proposition 1, on a $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$. D'autre part on a

$$\left|\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)\right| = [K_2^{(2)} : L] = h(L) = \frac{Q_L h(2p) h(2qp) h(q)}{4} = h(2p) = 8$$

et d'après le théorème 10, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 8.

– Soient $p = 3313$ et $q = 11$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$,
$$\left(\tfrac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1 \quad \text{et} \quad h(2p) = 16.$$
De plus on a $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$ et $e(2p) = -1$; par suite $Q_L = 2$ (voir lemme 4). Ainsi d'après la proposition 1, on a $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$. D'autre part on a
$$\left|\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)\right| = h(L) = h(2p) = 16$$
et d'après le théorème 10, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 16.

– Soient $p = 41$ et $q = 19$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$; de plus
$$\left(\tfrac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = -1.$$
Alors, d'après la proposition 1, $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$ et le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien.

Cas 2) $\boldsymbol{d_1 = q}$ *et* $\boldsymbol{d_2 = pq'}$ *où* $\boldsymbol{\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1}$.

– Soient $p = 433$, $q = 3$ et $q' = 7$. On a
$$\left(\tfrac{2}{p}\right) = \left(\tfrac{q}{p}\right) = -\left(\tfrac{q'}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad h(pq) = 8.$$
Ainsi, d'après la proposition 4, on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. D'autre part, on a $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{qp})$, $Q_L = 2$ et
$$\left|\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)\right| = h(L) = \frac{Q_L h(qp)h(qq'p)h(q')}{4} = h(qp) = 8.$$
D'après le théorème 11, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 8.

– Soient $p = 17$, $q = 7$ et $q' = 31$. On a
$$\left(\tfrac{2}{p}\right) = \left(\tfrac{q}{p}\right) = -\left(\tfrac{q'}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\tfrac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}.$$
D'après la proposition 4, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien.

– Soient $p = 1009$, $q' = 11$ et $q = 7$. On a
$$\left(\tfrac{2}{p}\right) = \left(\tfrac{q}{p}\right) = -\left(\tfrac{q'}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad h(pq) = 8.$$
D'après la proposition 4, $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. D'après le théorème 11, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 8.

References

[Azizi 2000] A. Azizi, "Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{k} = \mathbf{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ où $p \equiv -q \equiv 1 \bmod 4$", *Acta Arith.* **94**:4 (2000), 383–399. MR 2001k:11221 Zbl 0953.11033

[Azizi et Mouhib 2001] A. Azizi et A. Mouhib, "Sur le rang du 2-groupe de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{m},\sqrt{d})$ où $m = 2$ ou un premier $p \equiv 1 \pmod 4$", *Trans. Amer. Math. Soc.* **353**:7 (2001), 2741–2752. MR 2002b:11152

[Azizi et Mouhib ≥ 2008] A. Azizi et A. Mouhib, "Sur le 2-groupe de classes du corps de genres de certains corps biquadratiques", *Ann. Sci. Math. Québec*. To appear.

[Benjamin et Snyder 1995] E. Benjamin et C. Snyder, "Real quadratic number fields with 2-class group of type (2, 2)", *Math. Scand.* **76**:2 (1995), 161–178. MR 96m:11094 Zbl 0847.11058

[Benjamin et al. 1998] E. Benjamin, F. Lemmermeyer et C. Snyder, "Real quadratic fields with abelian 2-class field tower", *Journal of Number Theory* **73**:2 (1998), 182–194. MR 2000c:11179 Zbl 0919.11073

[Cohn 1978] H. Cohn, *A classical invitation to algebraic numbers and class fields*, Springer-Verlag, New York, 1978. MR 80c:12001

[Couture et Derhem 1992] R. Couture et A. Derhem, "Un problème de capitulation", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **314**:11 (1992), 785–788. MR 93c:11100 Zbl 0778.11059

[Gorenstein 1980] D. Gorenstein, *Finite groups*, Second éd., Chelsea Publishing Co., New York, 1980. MR 81b:20002

[Hasse 1930] H. Hasse, "Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie der Normenrestsymbols", *J. Reine Angew. Math.* **162** (1930), 134–144.

[Kaplan 1976] P. Kaplan, "Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques", *J. Reine Angew. Math.* **283/284** (1976), 313–363. MR 53 #8009

[Kisilevsky 1976] H. Kisilevsky, "Number fields with class number congruent to 4 mod 8 and Hilbert's theorem 94", *J. Number Theory* **8**:3 (1976), 271–279. MR 54 #5188 Zbl 0334.12019

[Kubota 1956] T. Kubota, "Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper", *Nagoya Math. J.* **10** (1956), 65–85. MR 18,643e

[Kučera 1995] R. Kučera, "On the parity of the class number of a biquadratic field", *J. Number Theory* **52**:1 (1995), 43–52. MR 96e:11139

[Terada 1971] F. Terada, "A principal ideal theorem in the genus field", *Tôhoku Math. J. (2)* **23** (1971), 697–718. MR 46 #5285 Zbl 0243.12003

[Wada 1966] H. Wada, "On the class number and the unit group of certain algebraic number fields", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **13** (1966), 201–209 (1966). MR 35 #5414

Received October 15, 2002.

ABDELMALEK AZIZI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOHAMMED 1
OUJDA
MAROC
azizi@sciences.univ-oujda.ac.ma

ALI MOUHIB
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOHAMMED 1
OUJDA
MAROC