Pacific Journal of Mathematics

INTÉGRABILITÉ LOCALE DES CARACTÈRES DE $\mathrm{SL}_n(D)$

BERTRAND LEMAIRE

Volume 222 No. 1 November 2005

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 222, No. 1, 2005

INTÉGRABILITÉ LOCALE DES CARACTÈRES DE $\mathrm{SL}_n(D)$

BERTRAND LEMAIRE

Let F be a nonarchimedean locally compact field, G be the multiplicative group of a finite dimensional central simple F-algebra, and G' be the kernel of the reduced norm $\det' : G \to F^\times$. We prove in this paper that for all distinguished open subgroup $H \subset G$ and all irreducible (smooth complex) representation π of H, the character $\Theta_\pi = \mathrm{trace}(\pi)$ is a locally integrable distribution on H, locally constant on the set of regular elements of H. Then we deduce that for all irreducible representation π' of G', the character $\Theta_{\pi'} = \mathrm{trace}(\pi')$ is a locally integrable distribution on G', locally constant on the set of regular elements of G'.

Introduction

Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien, D une algèbre à division de centre F, et V un espace vectoriel *à droite* sur D. Le degré de D sur F et la dimension de V sur D sont supposés finis. On pose $A = \mathrm{End}_D(V)$ et $G = \mathrm{Aut}_D(V)$. Soit G' le noyau de la norme réduite $\det' : G \to F^\times$. Rappelons que le choix d'une D-base de V induit un isomorphisme de groupes $G' \simeq \mathrm{SL}_n(D)$, $n = \dim_D(V)$. Un élément $g \in G$ est dit *régulier* si son polynôme caractéristique réduit est produit de polynômes irréductibles sur F, deux à deux distincts (on ne demande pas que ces derniers soient séparables sur F). On note G_{r} l'ensemble des éléments réguliers de G, et pour tout sous-groupe $J \subset G$ contenant G', on pose $J_{\mathrm{r}} = J \cap G_{\mathrm{r}}$.

Soit (π', W) une représentation complexe lisse irréductible de G', et soit dg' une mesure de Haar sur G'. On montre ici que le caractère $\Theta_{\pi'} = \mathrm{trace}(\pi'\, dg')$ défini par $\langle \phi, \Theta_{\pi'}\rangle = \mathrm{trace}(\pi'(\phi\, dg'))$ ($\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G')$) avec $\pi'(\phi\, dg') = \int_{G'} \phi(g')\pi'(g')\, dg'$, est une distribution localement intégrable sur G', localement constante sur G'_{r}. En d'autres termes, on montre qu'il existe une fonction $\lambda_{\pi'} : G' \to \mathbb{C}$ localement intégrable par rapport à dg' et localement constante sur G'_{r}, telle que $\Theta_{\pi'} = \lambda_{\pi'}\, dg'$. La fonction $\lambda_{\pi'}|_{G'_{\mathrm{r}}}$ est alors indépendante du choix de dg' ; on la note encore $\Theta_{\pi'}$. Rappelons que pour F de caractéristique nulle, ce résultat est vrai pour tout groupe

---

MSC2000: 22E50.

Mots-clefs: local field, central simple algebra, reduced norm, smooth complex representation, character of $\mathrm{SL}_n(D)$, twisted character of $\mathrm{GL}_n(D)$, Fourier transform, local integrability.

$\boldsymbol{G}(F)$ où $\boldsymbol{G}$ est un groupe algébrique linéaire réductif défini sur F, connexe ou non [Harish-Chandra 1978; Clozel 1987]. Notons que pour F de caractéristique ≥ 0, on sait déjà [Harish-Chandra 1980] que $\Theta_{\pi'}$ est une distribution localement constante sur l'ensemble des éléments semisimples réguliers (au sens habituel) de G'. Pour F de caractéristique > 0 divisant n, l'intégrabilité locale des caractères de G' — conjecturée par Harish-Chandra — est un résultat nouveau : même pour $\mathrm{SL}_2(F)$ avec F de caractéristique 2, il n'était pas connu jusqu'à présent.

Quelques mots sur l'intérêt d'un tel résultat. L'intégrabilité locale des caractères de G' est un outil fondamental pour l'analyse harmonique sur G'. Il permet en particulier d'utiliser la formule d'intégration de Weyl, et d'attaquer certaines questions ouvertes en caractéristique > 0 (e.g., l'orthogonalité des caractères des représentations de carré intégrable modulo le centre). D'autre part, si κ est un caractère de $F^\times$ trivial sur $(F^\times)^n$, le principe de la démonstration en deux étapes (cf. ci-dessous) permet de traiter les caractères tordus $\Theta_\pi^\kappa = \mathrm{trace}(\pi\, dg \circ A_\pi^\kappa)$ des représentations complexes lisses irréductibles κ-stables π de G ; où A_π^κ désigne un opérateur d'entrelacement non nul entre $\pi \otimes (\kappa \circ \det')$ et π, et dg une mesure de Haar sur G. On montre en particulier que ces caractères tordus sont des distributions localement intégrables sur G, localement constantes sur G_{r}. Pour F de caractéristique > 0 et $D = F$, ce résultat a des applications importantes dans la théorie de l'induction automorphe : il permet par exemple, grâce au "lemme fondamental" [Henniart et Lemaire 2004b] et à l'existence de pseudo-coefficients pour le caractère tordu d'une série κ-discrète de G [Henniart et Lemaire 2004a], de prouver par voie globale la surjectivité de l'application induction automorphe sans devoir utiliser les résultats d'Arthur — connus seulement en caractéristique nulle — sur les caractères tempérés virtuels (voir [Henniart et Herb 1995]) ; la rédaction de tout cela apparaîtra dans un article ultérieur.

Passons maintenant à la description détaillée des résultats. Choisissons une uniformisante ϖ de F. Identifions $F^\times$ au centre Z de G, et notons ${}_\varpi G'$ le sous-groupe fermé cocompact $\langle\varpi\rangle \cdot G' \subset G$. Soit $(\tilde{\pi}, W)$ la représentation de ${}_\varpi G'$ définie par $\tilde{\pi}(\varpi^i g') = \pi'(g')$ ($i \in \mathbb{Z}$, $g' \in G'$). Cette représentation s'étend en une représentation lisse (π, W) d'un sous-groupe ouvert distingué d'indice fini $H \subset G$. Par construction, π est admissible et irréductible. Soit dh une mesure de Haar sur H. On est donc ramené à montrer que :

(1) le caractère $\Theta_\pi = \mathrm{trace}(\pi\, dh)$ défini par

$$\langle f, \Theta_\pi \rangle = \mathrm{trace}(\pi(f\, dh)) \quad (f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H))$$

avec $\pi(f\, dh) = \int_H f(h)\pi(h)\, dh$, est une distribution localement intégrable sur H, localement constante sur H_{r} ;

(2) si le point (1) est vérifié, alors $\Theta_{\pi'}$ est une distribution localement intégrable sur G', localement constante sur G'_{r} ; et l'on a $\Theta_{\pi'}(g') = \Theta_\pi(g')$ pour tout $g' \in G'_{\mathrm{r}}$.

La démonstration des points (1) et (2) ci-dessus est l'objet principal de cet article.

Commençons par le point (1). Soit $H \subset G$ un sous-groupe ouvert distingué (il n'est pas nécessaire que H soit d'indice fini). Il s'agit tout d'abord de généraliser la théorie de Howe [1974] : comme dans [Lemaire 2004], on montre que la transformée de Fourier $T^\vee$ d'une distribution H-invariante T sur A à support "suffisamment voisin du cône nilpotent" (voir la section 2 pour une définition précise), coïncide au voisinage de 0 dans A avec la transformée de Fourier d'une distribution H-invariante sur A à support compact modulo H-conjugaison ; ce qui implique que $T^\vee$ est, au voisinage de 0 dans A, combinaison linéaire des transformées de Fourier des H-intégrales orbitales nilpotentes sur A. Rappelons que les G-orbites nilpotentes de A sont paramétrées par l'ensemble Π_n des partitions de n. Pour $\alpha \in \Pi_n$, la G-orbite nilpotente $\mathcal{O}_\alpha = \{g^{-1} n_\alpha g : g \in G\} \subset A$ associée à α est union disjointe finie de H-orbites, paramétrées par le groupe $\Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$; où l'on a posé $\Delta_H = \det'(H)$ et $\Delta_\alpha = \det'(G_{n_\alpha})$. Pour $\alpha \in \Pi_n$ et $\bar{x} \in \Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$, la H-intégrale orbitale $\Theta_{\alpha,\bar{x}}$ définie par la H-orbite $\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}$ associée à $(\alpha, \bar{x})$, est donnée par une formule intégrale analogue à celle de Howe [1974, proposition 5] (proposition 1.5). La transformée de Fourier $\Theta_{\alpha,\bar{x}}^\vee$ de $\Theta_{\alpha,\bar{x}}$ est en revanche plus difficile à décrire ; cf. (6.5) et la remarque A.6. Nous avons donc repris, en la modifiant pour l'adapter à la caractéristique > 0, la partie 1 de [Harish-Chandra 1978] : on montre que pour toute distribution H-invariante T sur A à support compact modulo H-conjugaison, la transformée de Fourier $T^\vee$ est une distribution localement intégrable sur A, localement constante sur l'ouvert $A' \subset A$ des éléments semisimples réguliers (au sens habituel) ; de plus, la fonction $T^\vee|_{A'}$ est donnée par une formule intégrale comme dans [Huntsinger 1997]. Notons que si F est de caractéristique > 0, ce dernier résultat est nouveau (i.e., n'avait pas encore été rédigé) même pour $D = F$ et $H = G$.

Soit π une représentation complexe lisse irréductible (donc admissible) de H, et soit $x \in H$ un élément H-*fermé* ; i.e., tel que la H-orbite de x est fermée dans H pour la topologie ϖ-adique. Alors une simple modification de la construction de [Lemaire 2004] (dans le cas non tordu) permet de "réduire" l'étude du caractère Θ_π au voisinage de x dans H, à celle d'une distribution H_x-invariante θ sur $\mathrm{Lie}(H_x) = \mathrm{Lie}(G_x)$ telle que le support de $\theta^\vee$ est "suffisamment voisin du cône nilpotent" ; ici, $\theta^\vee$ désigne la transformée de Fourier de θ dans $\mathrm{Lie}(G_x)$. Puisque $\mathrm{Lie}(G_x)$ est une F-algèbre semisimple de la forme $B_1 \times \cdots \times B_r$ où B_i est une algèbre centrale simple sur une extension finie F_i de F, on en déduit que la distribution Θ_π est intégrable (resp. constante si $x \in H_{\mathrm{r}}$) au voisinage de x dans H ; voir le corollaire 3.9 pour un énoncé précis (décomposition en germes). Puisque pour tout $y \in H$, la fermeture dans H de la H-orbite de y contient un élément H-fermé, le caractère Θ_π est localement intégrable sur tout le groupe H.

Quant au point (2), on se place dans la situation générale suivante : soit H un groupe localement profini possédant une base dénombrable d'ouverts, et soient G', $C \subset H$ deux sous-groupes fermés distingués tels que :

– $G' \cap C = \{1\}$,

– le groupe C est central dans H et discret (pour la topologie induite),

– le groupe $CG' \backslash H$ est commutatif et compact (pour la topologie quotient).

On pose $\tilde{G} = CG'$ (produit direct). *On suppose les groupes H et G' unimodulaires*. Soit (π', W) une représentation complexe lisse admissible irréductible de G'. Notons $(\tilde{\pi}, W)$ la représentation de $\tilde{G}$ définie par $\tilde{\pi}(zg) = \pi'(g')$ pour tous $z \in C$ et $g' \in G'$. *On suppose que la représentation $(\tilde{\pi}, W)$ de $\tilde{G}$ s'étend en une représentation lisse (π, W) de H*. Puisque π' est admissible, π l'est aussi. Soit Z le centre de H, et soient dh et dg' des mesures de Haar respectivement sur H et G'. *On suppose que la distribution $\Theta_\pi = \mathrm{trace}(\pi\, dh)$ est localement intégrable sur H*. On montre ici que si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i) $\mathrm{vol}(G'Z, dh) \neq \varnothing$ et la distribution Θ_π est localement constante sur une partie ouverte $\mathcal{Y} \subset H$ telle que $\mathrm{vol}(G' \smallsetminus (\mathcal{Y} \cap G'), dg') = 0$,

(ii) la projection canonique $H \to G'\backslash H$ est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de $G'\backslash H$,

alors la distribution $\Theta_{\pi'} = \mathrm{trace}(\pi'\, dg')$ est localement intégrable sur G'. De plus, si la condition (i) est vérifiée, ou si la condition (ii) est vérifiée et si la distribution Θ_π est localement constante sur une partie ouverte $\mathcal{Y} \subset H$ telle que $\mathrm{vol}(G' \smallsetminus (\mathcal{Y} \cap G'), dg') = 0$, alors la fonction $\Theta_\pi|_{\mathcal{Y}\cap G'}$ est localement intégrable sur G', et pour toute fonction $f' \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G')$, on a $\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \int_{G'} f'(g')\Theta_\pi(g)\, dg'$. Dans cette égalité, Θ_π est une fonction localement constante sur $\mathcal{Y}$, indépendante du choix de dh (voir plus haut).

Soit maintenant $\boldsymbol{G}$ un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur F, et soit $\boldsymbol{G}'$ son groupe dérivé. Soit $\boldsymbol{C}$ le tore central F-déployé maximal de $\boldsymbol{G}$, et soit $\boldsymbol{C}(\varpi)$ le sous-groupe de $\boldsymbol{C}(F)$ défini par $\boldsymbol{C}(\varpi) = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}^*(\boldsymbol{C}), \langle\varpi\rangle)$. Posons ${}_\varpi\boldsymbol{G}'(F) = \boldsymbol{C}(\varpi)\boldsymbol{G}'(F) \subset \boldsymbol{G}(F)$ (produit direct), et soit $H \subset \boldsymbol{G}(F)$ un sous-groupe ouvert contenant ${}_\varpi\boldsymbol{G}'(F)$. Le triplet $(H, \boldsymbol{G}'(F), \boldsymbol{C}(\varpi))$ vérifie toutes les conditions imposées au triplet (H, G', C) dans le paragraphe précédent. Soit $\boldsymbol{G}(F)_{\mathrm{sr}}$ l'ensemble des éléments semisimples réguliers de $\boldsymbol{G}(F)$. Pour toute représentation complexe lisse irréductible (donc admissible) π de H, on montre comme dans [Harish-Chandra 1980] que le caractère Θ_π est une fonction localement constante sur $H \cap \boldsymbol{G}(F)_{\mathrm{sr}}$ (cet ensemble est ouvert et dense dans H). De plus, la projection canonique $\boldsymbol{G}(F) \to \boldsymbol{G}'(F)\backslash\boldsymbol{G}(F)$ est scindée au-dessus de $\boldsymbol{G}'(F)\backslash\boldsymbol{G}(F)$, par conséquent la condition (ii) est vérifiée (la condition (i) en revanche n'est pas toujours vérifiée). D'où le résultat cherché : pour toute représentation complexe lisse irréductible π' de $G' \simeq \mathrm{SL}_n(D)$, le caractère $\Theta_{\pi'}$ est une distribution localement intégrable sur G', localement constante sur G'_{r}. De plus, au voisinage d'un élément G-fermé x de G', le caractère $\Theta_{\pi'}$ possède une décomposition en germes, héritée de celle du caractère Θ_π d'une représentation lisse π prolongeant π' à un sous-groupe ouvert d'indice fini de G. On montre aussi comment remplacer cette décomposition par une combinaison linéaire (finie) des transformées de Fourier des G_x-intégrales orbitales nilpotentes sur $\mathrm{Lie}(G_x)$ *tordues* par un caractère de G_x.

L'article est divisé en sept sections, suivies d'un appendice traitant des distributions $(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee$. Ce sont :

1. Extension de la théorie de Howe [1974]
2. Transformées de Fourier des distributions $T \in J_H^*(A)$, d'après Harish-Chandra [1978]
3. Intégrabilité locale des caractères de H
4. Intégrabilité locale des caractères de G' : une méthode générale
5. Intégrabilité locale des caractères de $\boldsymbol{G}'(F)$
6. Intégrabilité locale des caractères de $\mathrm{SL}_n(D)$
7. Application : intégrabilité locale des caractères tordus des représentations κ-stables de $\mathrm{GL}_n(D)$

Dans la section 2, on montre que la transformée de Fourier d'une distribution H-invariante sur A à support compact, est localement constante sur A' et intégrable au voisinage de 0 dans A ; l'intégrabilité locale sur A est établie à la fin de la section 3. La section 3 reprend en la modifiant la construction de [Lemaire 2004] (dans le cas non tordu). La situation générale où H est un groupe localement profini et G', $C \subset H$ sont deux sous-groupes fermés distingués, est traitée dans la section 4. Dans la section 5, on applique les résultats de la section 4 au cas particulier des groupes algébriques.

Conventions d'écriture, notations. Si X est un espace topologique totalement discontinu. On note $C_{\mathrm{c}}^\infty(X)$ (resp. $C_{\mathrm{c}}(X)$ si X discret, $C^\infty(X)$ si X est compact, $C(X)$ si X est fini) l'espace des fonctions $X \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact, et $\mathfrak{D}(X)$ l'espace des distributions sur X. Si de plus X est muni d'une structure de groupe topologique, on note $\epsilon(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes lisses irréductibles de X.

Une distribution T sur un groupe topologique localement compact totalement discontinu X est dite *localement constante* (resp. *localement intégrable*) sur une partie ouverte $Y \subset X$ s'il existe une mesure de Haar à gauche $d\mu$ sur X et une fonction $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ localement constante (resp. localement intégrable par rapport à $d\mu$) telle que $T|_Y = \lambda\, d\mu$. À multiplication près par une constante > 0, la fonction λ ne dépend pas du choix de $d\mu$; lorsque la mesure de Haar sur X est fixée (et qu'aucune autre ambiguïté n'est possible), on note λ par la même lettre T.

Soient X un groupe topologique localement compact totalement discontinu, et $\Omega \subset X$ une partie ouverte compacte. On appelle *mesure de Haar sur X normalisée par* Ω l'unique mesure de Haar à gauche $d\mu$ sur X telle que $\mathrm{vol}(\Omega, d\mu) = 1$. Plus généralement, pour tout sous-groupe fermé $Y \subset X$, on appelle *mesure de Haar sur Y normalisée par* Ω l'unique mesure de Haar à gauche $d\mu'$ sur Y telle que $\mathrm{vol}(Y \cap \Omega, d\mu') = 1$. Enfin si X est compact, on appelle *mesure de Haar normalisée sur X* la mesure de Haar sur X normalisée par X.

En dehors de la section 4 (qui traite de groupes topologiques localement profinis), toutes les notions topologiques utilisées dans ce papier font référence à la *topologie ϖ-adique* ; c'est pourquoi nous oublierons le plus souvent de le préciser.

1. Extension de la théorie de Howe

Soit H un sous-groupe ouvert distingué de G (un tel groupe contient G'). On pose $\Delta_H = \det'(H) \subset F^\times$.

Les classes de G-conjugaison dans A sont décrites dans [Lemaire 2004, 5]. Reprenons le lexique introduit dans [Lemaire 2004, 6] : un élément $y \in A$ est dit

- *fermé* (ou *G-fermé*) si la G-orbite de y est fermée dans A, i.e. si le polynôme minimal réduit de y est produit de polynômes irréductibles sur F deux à deux distincts ;
- *pur* (ou *G-pur*) si le polynôme minimal réduit de y est irréductible sur F ;
- *régulier* (ou *G-régulier*) si le polynôme caractéristique réduit de y est produit de polynômes irréductibles sur F deux à deux distincts ;
- *séparable* (ou *G-séparable*) si chaque composante F-irréductible du polynôme minimal réduit de y est séparable sur F.

Les éléments fermés séparables (resp. réguliers séparables) sont donc les éléments semisimples (resp. semisimples réguliers) au sens habituel. Un élément régulier est *pur* si et seulement si son centralisateur dans G est compact modulo Z. Les éléments purs réguliers séparables sont donc les éléments semisimples réguliers elliptiques au sens habituel.

Soit A_{r} l'ensemble des éléments réguliers de A ; on a donc $G_{\mathrm{r}} = G \cap A_{\mathrm{r}}$. Rappelons que A' désigne l'ensemble des éléments réguliers séparables de A (et pas l'algèbre de Lie de G' !). Soit $A'_{\mathrm{e}} \subset A'$ le sous-ensemble formé des éléments purs.

Pour toutes parties $Y \subset A$ et $Q \subset G$, on note ${}^Q Y = \mathrm{Ad}\, Q(Y)$ l'ensemble $\{gyg^{-1} : g \in Q,\ y \in Y\}$; si de plus $Y = \{y\}$, on pose $\mathcal{O}_Q(y) = {}^Q\{y\}$ et l'on note Q_y le centralisateur $\{g \in Q : gyg^{-1} = y\}$ de y dans Q. L'action par conjugaison de G

sur A induit une action sur $\mathcal{D}(A)$: pour $g \in G$, $T \in \mathcal{D}(A)$ et $f \in C_c^\infty(A)$, on pose $\langle f, \mathrm{Ad}\, g(T)\rangle = \langle \mathrm{Ad}^* g^{-1}(f), T\rangle$ avec $\mathrm{Ad}^* g^{-1}(f) = f \circ \mathrm{Ad}\, g$.

Pour toute partie $X \subset A$, on note $\bar{X}$ la fermeture de X dans A. Pour toute partie fermée $X \subset A$ telle que ${}^H X = X$, on note $J_H(X)$ l'espace des distributions H-invariantes sur X (pour l'action de H par conjugaison) à support contenu dans X. Une partie $\Omega \subset A$ est dite *compacte modulo H-conjugaison* si elle est fermée et s'il existe une partie compacte $X \subset A$ telle que $\Omega \subset {}^H X$. Puisque le groupe ZH est cocompact (donc d'indice fini) dans G, $\Omega \subset A$ est une partie compacte modulo H-conjugaison si et seulement si elle est compacte modulo G-conjugaison. Soit $J_H^* = J_H^*(A) \subset J_H(A)$ le sous-espace formé des distributions à support compact modulo H-conjugaison.

Soient $\mathfrak{o}_D$ l'anneau des entiers de D, $\mathfrak{p}_D$ son idéal maximal, $d = (D:F)^{1/2}$, et ω la valuation sur D normalisée par $\omega(D^\times) = \frac{1}{d}\mathbb{Z}$. Pour $y \in F$, on pose $|y| = q^{-\omega(y)}$ où q désigne le cardinal du corps résiduel de F. Fixons un $\mathfrak{o}_D$-réseau Λ dans V et posons $\mathfrak{A}^\nu = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_D}(\Lambda, \Lambda \cdot \mathfrak{p}_D^{d\nu})$ ($\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$). Ainsi $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0$ est un $\mathfrak{o}_F$-ordre maximal (donc héréditaire) dans A, de radical de Jacobson $\mathfrak{A}^{1/d}$. Posons $K = \mathfrak{A}^\times$ et $K^\nu = 1 + \mathfrak{A}^\nu$ ($\nu \in (\frac{1}{d}\mathbb{Z})_{>0}$).

Pour $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$, on note j^ν la projection canonique $\mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A/\mathfrak{A}^\nu)$. Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des éléments nilpotents de A, et pour $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$ et $X \subset A$, soit $J_{H,X}^\nu = J_{H,X}^\nu(A)$ l'espace des distributions H-invariantes T sur A telles que pour $y \in A$, $\langle \mathbf{1}_{y+\mathfrak{A}^\nu}, T\rangle \neq 0$ implique que $y \in X$. On suppose dans cette section 1 que $n = \dim_D(V) > 1$.

Proposition 1.1. *Il existe un voisinage ouvert et fermé $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{N} \smallsetminus \{0\}$ dans $A \smallsetminus \{0\}$, tel que $F^\times \mathcal{V} = \mathcal{V}$ et $j^\nu(J_{H,\mathcal{V}\cup\mathfrak{A}^\mu}^\nu) \subset j^\nu(J_H^*)$ pour tous ν, $\mu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Il s'agit simplement d'adapter la démonstration de [Lemaire 2004, 1.1]. Soit $n_0 \in \mathfrak{N} \smallsetminus \{0\}$. Comme en [Lemaire 2004, 1], on pose $V^i = \ker n_0^i$ ($i = 0, \dots, r$; $n_0^{r-1} \neq 0$ et $n_0^r = 0$). Soit P le sous-groupe parabolique de G défini par $P = \{g \in G : g(V^i) = V^i,\ i = 1, \dots, r-1\}$. Posons $W^1 = V^1$, et pour $i = 2, \dots, r$, fixons un sous-D-espace vectoriel W_i de V_i tel que $V^i \cap \Lambda = (V^{i-1} \cap \Lambda) \oplus (W^i \cap \Lambda)$. Soit M le sous-groupe de Lévi de P défini par $M = \{g \in G : g(W^i) = W^i,\ i = 1, \dots, r\}$. On a la décomposition $M = \prod_{i=1}^r \mathrm{Aut}_D(W^i)$. Soit $Z(M)$ le centre de M, identifié à $(F^\times)^r$. L'élément $\delta \in Z(M)$ défini en [Lemaire 2004, 1] n'appartient pas nécessairement à H ; on le remplace ici par l'élément $\delta' \in Z(M) \cap G'$ défini par

$$\delta' = \begin{cases} (\varpi^{-k}, \varpi^{-k+1}, \dots, \varpi^{-1}, \varpi, \varpi^2, \dots, \varpi^k) & \text{si } r = 2k, \\ (\varpi^{-k}, \varpi^{-k+1}, \dots, \varpi^{-1}, 1, \varpi, \varpi^2, \dots, \varpi^k) & \text{si } r = 2k+1. \end{cases}$$

Soient U le radical unipotent de P, $\bar{U}$ le radical unipotent du sous-groupe parabolique $\bar{P}$ de G opposé à P par rapport à M, et $\mathfrak{u}$, $\bar{\mathfrak{u}} \subset A$ les sous-F-algèbres nilpotentes correspondantes. L'application $A \to A$, $g \mapsto \delta' g \delta'^{-1}$ contracte $\mathfrak{u}$ et dilate $\bar{\mathfrak{u}}$. Précisément, pour $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$, on a les inclusions

$$\mathfrak{u} \cap \mathfrak{A}^{\nu+n} \subset \delta'(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{A}^{\nu})\delta'^{-1} \subset \mathfrak{u} \cap \mathfrak{A}^{\nu+1},$$
$$\bar{\mathfrak{u}} \cap \mathfrak{A}^{\nu-1} \subset \delta'(\bar{\mathfrak{u}} \cap \mathfrak{A}^{\nu})\delta'^{-1} \subset \bar{\mathfrak{u}} \cap \mathfrak{A}^{\nu-n}.$$

Pour $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$, notons $\mathfrak{B}'^{\nu}$ l'$\mathfrak{o}_F$-réseau dans A défini par $\mathfrak{B}'^{\nu} = \mathfrak{A}^{\nu} \cap \delta' \mathfrak{A}^{\nu} \delta'^{-1}$. Le lemme 1.5 de [Lemaire 2004] reste vrai si l'on remplace $\mathfrak{B}^{\nu}$ par $\mathfrak{B}'^{\nu}$. Puisque H est ouvert dans G, il existe un $\eta \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}_{>0}$ tel que $K^{\eta} \subset H$. On en déduit que le lemme 1.6 de [Lemaire 2004] (condition $(**)$ de [Howe 1974]) reste vrai si l'on remplace G par H. La suite de la démonstration est identique celle de [Lemaire 2004, 1.1]. □

Soit L/F une extension non ramifiée maximale contenue dans D, et soit ϖ_D une uniformisante de D telle que $\varpi_D L \varpi_D^{-1} = 1$ et $\varpi_D y \varpi_D^{-1} = y^{\tau}$ $(y \in L)$ pour un générateur τ de $\mathrm{Gal}(L/F)$. On peut supposer que $\varpi_D^d = \varpi$. On pose $A_L = A \otimes_F L$. Choisissons une D-base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. Soit $d = \dim_F(D)^{1/2}$. Les éléments $e_i \varpi_D^{d-j}$ $(i = 1, \dots, n\,;\ j = 1, \dots, d)$ forment une L-base de V. Pour $j = 1, \dots, d$, notons V_j le sous-L-espace vectoriel de V défini par $V_j = \bigoplus_{i=1}^n e_i \varpi_D^{d-j} L$. Alors la L-décomposition $V = \bigoplus_{j=1}^d V_j$ induit une identification $A_L = \bigoplus_{1\le j,k\le d} \mathrm{Hom}_L(V_k, V_j)$. Puisque pour $j = 1, \dots, d$, on a $\tau(V_j) = V_j \varpi_D^{-1} = V_{j+1}$ où l'indice j est considéré modulo $d\mathbb{Z}$, A s'identifie à l'ensemble des matrices par blocs $(Y_{j,k})_{1\le j,k\le d} \in A_L$, $Y_{j,k} \in \mathrm{Hom}_L(V_k, V_j)$, telles que $(Y_{j,k}^*)^{\tau} = Y_{j+1,k+1}^*$ $(1 \le j, k \le d)$ où l'on a posé

$$Y_{j,k}^* = \begin{cases} \varpi^{-1} Y_{j,k} & \text{si } j > k, \\ Y_{j,k} & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après [Lemaire 2004, 5.3/1], les classes de G-conjugaison d'éléments nilpotents de A sont paramétrées par l'ensemble Π_n des partitions de n. On rappelle la construction. Soit $\alpha = (\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge \alpha_n) \in \Pi_n$ $(\alpha_i \ge 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = n)$. La L-base $(e_1\varpi_D^{d-1}, \dots, e_n\varpi_D^{d-1})$ de V_1 induit une identification $\mathrm{End}_L(V_1) = \mathrm{M}_n(L)$. Soit $\tilde{n}_\alpha \in \mathrm{End}_L(V_1)$ l'élément nilpotent défini par $\tilde{n}_\alpha = \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_r})$ (matrice diagonale par blocs) où r est le plus grand entier $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$, et

$$J_{\alpha_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{\alpha_k}(L)$$

avec (convention d'écriture) $J_1 = 0$. Posons $n_\alpha = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \tilde{n}_\alpha^{\tau^i} \in \mathfrak{N} \cap \bigoplus_{i=1}^{d} \mathrm{End}_L(V_i)$. L'application $\alpha \mapsto n_\alpha$ induit une bijection entre Π_n et l'ensemble des classes de G-conjugaison d'éléments nilpotents de A, d'application réciproque la bijection induite par l'application $\mathfrak{N} \to \Pi_n$, $g \mapsto \phi^{-1}(\alpha_g)$ définie en [Lemaire 2004, 5].

Soit $\alpha \in \Pi_n$. Soient Δ_α et $\Delta_{H,\alpha}$ les sous-groupes de $F^\times$ définis par $\Delta_\alpha = \det'(G_{n_\alpha})$ et $\Delta_{H,\alpha} = \det'(H_{n_\alpha})$ $(= \Delta_H \cap \Delta_\alpha)$. Puisque $G' \subset H$, l'application $\det'$ induit par restriction et passage aux quotients un isomorphisme de groupes $H_{n_\alpha} \backslash G_{n_\alpha} \to \Delta_{H,\alpha} \backslash \Delta_\alpha$. Le groupe HG_{n_α} est distingué dans G, et l'application $\det'$ induit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes $\delta_\alpha : HG_{n_\alpha} \backslash G \to \Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$. Puisque $Z \subset G_{n_\alpha}$, le groupe $HG_{n_\alpha} \backslash G$ est fini. La G-orbite $\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{O}_G(n_\alpha)$ est un H-ensemble (pour l'opération de H par conjugaison), et via δ_α, l'ensemble des H-orbites de $\mathcal{O}_\alpha$ est un torseur sous $\Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$.

Remarque 1.2. Si l'on suppose seulement que H est un sous-groupe distingué de G contenant G', alors le groupe $\Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$ peut être infini. En effet, pour $D = F$, $G = \mathrm{GL}_2(F)$ et $H = \mathrm{SL}_2(F)$, si α est la partition $(2, 0)$, alors n_α est l'élément nilpotent $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\Delta_\alpha = (F^\times)^2$. Or pour $F = \mathbb{F}_2((\varpi))$, le groupe $(F^\times)^2 \backslash F^\times$ est infini.

Soit $\alpha \in \Pi_n$. On pose $V_\alpha^i = \ker n_\alpha^i$ ($i = 0, \dots, r_\alpha$; $n_\alpha^{r_\alpha - 1} \neq 0$ et $n_\alpha^{r_\alpha} = 0$). Soit $\mathfrak{p}_\alpha$ la sous-F-algèbre parabolique de A *associée à* n_α, définie par $\mathfrak{p}_\alpha = \{g \in A : g(V_\alpha^i) \subset V_\alpha^i,\ i = 1, \dots, r_\alpha - 1\}$. Le radical nilpotent de $\mathfrak{p}_\alpha$ est la sous-F-algèbre nilpotente de A définie par $\mathfrak{u}_\alpha = \{g \in A : g(V_\alpha^i) \subset V_\alpha^{i-1},\ i = 1, \dots, r_\alpha - 1\}$. On pose $P_\alpha = \mathfrak{p}_\alpha \cap G$, $P_{H,\alpha} = \mathfrak{p}_\alpha \cap H$ et $U_\alpha = \mathfrak{u}_\alpha \cap G$. D'après [Lemaire 2004, 1.4/1], on a l'inclusion $G_{n_\alpha} \subset P_\alpha$. Puisque $G' \subset H$ et $G = G' P_\alpha$, l'inclusion $P_\alpha \subset G$ induit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes $\iota_\alpha : P_{H,\alpha} G_{n_\alpha} \backslash P_\alpha \to HG_{n_\alpha} \backslash G$. La P_α-orbite $\mathcal{O}_\alpha^\bullet = \mathcal{O}_{P_\alpha}(n_\alpha)$ est un $P_{H,\alpha}$-ensemble (pour l'opération de $P_{H,\alpha}$ par conjugaison) ; et via $\delta_\alpha^\bullet = \delta_\alpha \circ \iota_\alpha$, l'ensemble des $P_{H,\alpha}$-orbites de $\mathcal{O}_\alpha^\bullet$ muni du point-base $\mathcal{O}_{P_{H,\alpha}}(n_\alpha)$, est un torseur sous $\Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$.

Soit $\Pi_{H,n}$ l'ensemble des couples $(\alpha, \bar{x})$ avec $\alpha \in \Pi_n$ et $\bar{x} \in \Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$. Pour $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, choisissons un représentant x de $(\delta_\alpha^\bullet)^{-1}(\bar{x})$ dans P_α, et posons $n_{\alpha,x} = x^{-1} n_\alpha x$; ainsi, $\mathfrak{p}_\alpha$ est la sous-F-algèbre parabolique de A associée à $n_{\alpha,x}$. L'application $\Pi_{H,n} \to \mathfrak{N}$, $(\alpha, \bar{x}) \mapsto n_{\alpha,x}$ induit une bijection entre $\Pi_{H,n}$ et l'ensemble des classes de H-conjugaison dans $\mathfrak{N}$. Pour $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, on pose $\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}} = \mathcal{O}_H(n_{\alpha,x})$ et $\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}^\bullet = \mathcal{O}_{P_\alpha}(n_{\alpha,x})$; on a $\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}} = x^{-1} \mathcal{O}_{\alpha,1} x$ et $\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}^\bullet = x^{-1} \mathcal{O}_{\alpha,1}^\bullet x$. Pour $\alpha \in \Pi_n$, on a donc $\mathcal{O}_\alpha = \coprod_{\bar{x}} \mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}$ où $\bar{x}$ parcourt les éléments de $\Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$, et chaque H-orbite $\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}$ est ouverte et fermée dans $\mathcal{O}_\alpha$. Pour $\alpha \in \Pi_n$, on a $\mathcal{O}_\alpha^\bullet = \mathcal{O}_\alpha \cap \mathfrak{u}_\alpha$ [Lemaire 2004, 1.4/4], d'où $\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}^\bullet = \mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}} \cap \mathfrak{u}_\alpha$ ($\bar{x} \in \Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$) ; de plus, on a $\mathcal{O}_\alpha^\bullet = \coprod_{\bar{x}} \mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}^\bullet$ où $\bar{x}$ parcourt les éléments de $\Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$, et chaque $P_{H,\alpha}$-orbite $\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}^\bullet$ est ouverte et fermée dans $\mathcal{O}_\alpha^\bullet$.

Lemme 1.3. *Soit $\alpha \in \Pi_n \smallsetminus \{(1,\dots,1)\}$. Pour $\bar{x} \in \Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times$, $\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}$ est ouvert dans $\mathfrak{u}_\alpha$, et $\overline{\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}} \smallsetminus \mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}} = \overline{\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}} \bigcap (\mathfrak{u}_\alpha \smallsetminus \mathbb{O}^\bullet_\alpha)$.*

Démonstration. Soit $\bar{x} \in \Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times$. Puisque $\mathbb{O}^\bullet_\alpha$ est ouvert dans $\mathfrak{u}_\alpha$ [Lemaire 2004, 1.4/5] et $\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}$ est ouvert dans $\mathbb{O}^\bullet_\alpha$, $\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}$ est ouvert dans $\mathfrak{u}_\alpha$. Puisque $\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}$ est fermé dans $\mathbb{O}^\bullet_\alpha$, on a l'inclusion $\overline{\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}} \smallsetminus \mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}} \subset \overline{\mathbb{O}^\bullet_\alpha} \smallsetminus \mathbb{O}^\bullet_\alpha$. Or $\overline{\mathbb{O}^\bullet_\alpha} = \mathfrak{u}_\alpha$ [Lemaire 2004, 1.4/5], d'où l'inclusion $\overline{\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}} \smallsetminus \mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}} \subset \overline{\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}} \bigcap (\mathfrak{u}_\alpha \smallsetminus \mathbb{O}^\bullet_\alpha)$. L'inclusion inverse est claire. □

Lemme 1.4. *Pour tout sous-groupe $J \subset G$ contenant G' et tout sous-groupe parabolique $P \subset G$, on a la décomposition $J = (K \cap J)(P \cap J)$.*

Démonstration. Soit $P \subset G$ un sous-groupe parabolique, que l'on peut supposer minimal. On a la décomposition d'Iwasawa $G = KP$. Soit $j \in J$. Écrivons $j = kp$ avec $k \in K$ et $p \in P$. Soit $x = \det' k \in \mathfrak{o}_F^\times$, et soit $y \in \mathfrak{o}_D^\times$ tel que $\det' y = x$. Soit $(b_1,\dots,b_n)$ une D-base de V telle que $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n b_i\mathfrak{o}_D$. Cette base induit les identifications $K = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_D) \subset \mathrm{GL}_n(D) = G$. Soit $M \subset G$ le sous-groupe formé des matrices diagonales (à coefficients dans D), et soit $k_0 \in K$ tel que $k_0^{-1}Mk_0 \subset P$. Alors $a = k_0^{-1}\mathrm{diag}(y,1,\dots,1)k_0 \in K \cap P$ et $\det' a = x$. On a donc $j = (ka^{-1})(ap)$ avec $ka^{-1} \in K \cap G' \subset K \cap J$ et $ap = (ka^{-1})^{-1}j \in P \cap J$. D'où le lemme. □

Posons $K_H = K \cap H$, et soient dg, dh et dk les mesures de Haar respectivement sur G, H et K normalisées par K_H.

Puisque H est ouvert dans G, pour $(\alpha,\bar{x}) \in \Pi_n$, le centralisateur $H_{n_{\alpha,x}}$ de $n_{\alpha,x}$ dans H est ouvert dans $G_{n_{\alpha,x}}$, donc est unimodulaire [Lemaire 2004, 1.10/1]. Pour chaque $\alpha \in \Pi_n$, choisissons une mesure de Haar dg_{n_α} sur G_{n_α} ; notons dh_{n_α} la mesure de Haar sur H_{n_α} définie par $dh_{n_\alpha} = dg_{n_\alpha}|_{H_{n_\alpha}}$; et pour $\bar{x} \in \Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times$, notons $dh_{n_{\alpha,x}}$ la mesure de Haar sur $H_{n_{\alpha,x}}$ déduite de dh_{n_α} via l'isomorphisme $H_{n_\alpha} \to H_{n_{\alpha,x}}$, $h \mapsto x^{-1}hx$.

Proposition 1.5. *Soit $\alpha \in \Pi_n$. Pour $\bar{x} \in \Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times$, l'intégrale orbitale*

$$\Theta_{\alpha,\bar{x}}(f, dh_{n_{\alpha,x}}) = \int_{H_{n_{\alpha,x}}\backslash H} f(h^{-1}n_{\alpha,x}h)\,\frac{dh}{dh_{n_{\alpha,x}}} \qquad (f \in C_c^\infty(A))$$

est absolument convergente; i.e., $\Theta_{\alpha,\bar{x}} = \Theta_{\alpha,\bar{x}}(\,\cdot\,, dh_{n_{\alpha,x}}) \in J_H(A)$. De plus, fixée une mesure de Haar du sur $\mathfrak{u}_\alpha$, il existe une constante $c = c(dh_{n_\alpha}, du) > 0$ telle que pour tout $\bar{x} \in \Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times$, on a

$$\langle f, \Theta_{\alpha,\bar{x}}\rangle = c \iint_{K_H \times \overline{\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}}} f(k^{-1}uk)\,dk\,du \qquad (f \in C_c^\infty(A));$$

en particulier, la distribution $\Theta_{\alpha,\bar{x}}$ ne dépend pas du choix de $x \in P_\alpha$.

Démonstration. Si $\alpha = (1,\dots,1)$ (i.e., si $n_\alpha = 0$), il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que $\alpha \neq (1,\dots,1)$. Soit dp la mesure de Haar à gauche sur P_α normalisée par K_H. Puisque $H = P_{H,\alpha}K_H$ 1.4 et $P_{H,\alpha} \cap K_H = P_\alpha \cap K_H$, pour toute fonction intégrable $f : H \to \mathbb{C}$, on a $\int_H f(h)\,dh = \iint_{P_{H,\alpha}\times K_H} f(pk)\,dp\,dk$. Soit $\bar{x} \in \Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times$, et soit dy une mesure de Haar sur $H_{n_{\alpha,x}}$. Soit du une mesure de Haar sur $\mathfrak{u}_\alpha$. Grâce à 1.3, on montre comme dans [Laumon 1996, 4.8.9] (cf. aussi [Lemaire 2004, 3.2.2]) qu'il existe une constante $c(dy, du) > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(A)$, on a

$$\Theta_{\alpha,\bar{x}}(f, dy) = c(dy, du) \iint_{K_H\times\overline{\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}}} f(k^{-1}uk)\,dk\,du.$$

Ce qui implique que $\Theta_{\alpha,\bar{x}}(\,\cdot\,, dy) \in J_H(A)$. Soit δ_{P_α} le caractère module sur P_α, défini par $d(p'pp'^{-1}) = \delta_{P_\alpha}(p)dp'$ $(p,\ p' \in P_\alpha)$. Posons $K_H^x = x^{-1}Kx$, et notons dk' la mesure de Haar normalisée sur K_H^x. En remplaçant K par K_H^x dans la construction précédente, on obtient de la même manière que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(A)$, on a

$$\Theta_{\alpha,\bar{x}}(f, dy) = c(dy, du)\delta_{P_\alpha}(x^{-1}) \iint_{K_H^x\times\overline{\mathbb{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}}} f(k'^{-1}uk')\,dk'\,du.$$

Puisque $\Theta_{\alpha,\bar{x}}(\,\cdot\,, dh_{n_{\alpha,x}}) = \mathrm{Ad}\,x^{-1}(\Theta_{\alpha,1}(\,\cdot\,, dh_{n_\alpha}))$, on a

$$c(dh_{n_{\alpha,x}}, du) = c(dh_{n_\alpha}, du).$$

□

Puisque chaque G-orbite nilpotente de A est union finie de H-orbites, pour $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, la H-orbite $\mathbb{O}_{\alpha,\bar{x}}$ est localement fermée dans A ; et $\overline{\mathbb{O}_{\alpha,\bar{x}}}$ est réunion de $\mathbb{O}_{\alpha,\bar{x}}$ et d'un nombre fini de H-orbites nilpotentes de dimension (en tant que variétés ϖ-adiques) strictement inférieure à celle de $\mathbb{O}_{\alpha,\bar{x}}$ [Lemaire 2004, 5.2/2]. On en déduit que les distributions $\Theta_{\alpha,\bar{x}}$ $((\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n})$ forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $J_H(\mathfrak{N})$.

Soit d_Ag la mesure de Haar sur A normalisée par $\mathfrak{A}$; pour tout $\mathfrak{o}_F$-ordre maximal $\mathfrak{Y}$ dans A, on a $\mathrm{vol}(\mathfrak{Y}, d_Ag) = 1$. Fixons un caractère Ψ_F de $(F, +)$ de conducteur $\mathfrak{p}_F$ et posons $\Psi_A = \Psi_F \circ \mathrm{tr}'_{A/F}$ où $\mathrm{tr}'_{A/F} : A \to F$ désigne la trace réduite. On note $f \mapsto f^\vee$ la transformée de Fourier sur $C_c^\infty(A)$ définie par $f^\vee(y) = \int_A f(g)\overline{\Psi_A(yg)}\,d_Ag$, où $z \mapsto \bar{z}$ désigne la conjugaison complexe. D'où une transformée de Fourier $T \mapsto T^\vee$ sur $\mathfrak{D}(A)$, définie par $\langle f, T^\vee\rangle = \langle f^\vee, T\rangle$ $(f \in C_c^\infty(A))$.

Proposition 1.6. *Soit $\Omega \subset A$ une partie H-invariante compacte modulo H-conjugaison. Il existe un entier b tel que pour toute distribution $T \in J_H(\Omega)$, il existe des constantes $c_{\alpha,\bar{x}}(T)$ $((\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n})$ telles que*

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}^b}\cdot\Big(T^\vee - \sum_{(\alpha,\bar{x})} c_{\alpha,\bar{x}}(T)\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}\Big) = 0$$

où $(\alpha, \bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$.

Démonstration. Elle est identique à la démonstration de [Lemaire 2004, 1.11]. □

Pour $\alpha \in \Pi_n$, notons $\Theta_\alpha = \Theta_\alpha(\,\cdot\,, dg_{n_\alpha}) \in J_G(A)$ la distribution définie par $\langle f, \Theta_\alpha\rangle = \int_{G_{n_\alpha}\backslash G} f(g^{-1}n_\alpha g)(dg/dg_{n_\alpha})$, où $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$. D'après [Lemaire 2004, 1.10/3], pour $\alpha \in \Pi_n$, la distribution $\Theta_\alpha^\vee$ est localement intégrable sur A, localement constante sur A'. On va voir qu'il en est de même des distributions $\Theta_{\alpha,\bar{x}}^\vee$ pour $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$.

2. Transformées de Fourier des distributions $T \in J_H^*(A)$, d'après Harish-Chandra

Pour tout sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K} \subset G$, on note $d_{\mathcal{K}}k$ la mesure de Haar normalisée sur $\mathcal{K}$, et l'on pose

$$\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}(g) = \int_{\mathcal{K}} \overline{\Psi_A(kyk^{-1}g)}\, d_{\mathcal{K}}k \qquad (y,\ g \in A).$$

Proposition 2.1. *Soit $T \in J_H^*(A)$. La transformée de Fourier $T^\vee$ est une distribution localement intégrable sur A, localement constante sur A'. Et pour $y \in A'$, on a $T^\vee(y) = \langle \overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}, T\rangle$ pour tout sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K} \subset H$.*

Pour $y \in A$, la fonction $A \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}(g)$ est clairement localement constante. Si de plus $y \in A'$, on montrera en particulier que pour toute partie compacte modulo H-conjugaison $\Omega \subset A$, l'intersection $\mathrm{Supp}(\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}) \cap \Omega$ est compacte ; ce qui donnera un sens à l'énoncé ci-dessus. L'idée sous-jacente à la proposition 2.1 est la suivante : soit $T \in J_H^*(A)$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$. On a

$$\langle f, T^\vee\rangle = \int_A \left(\int_{A'} f(y)\overline{\Psi_A(gy)}\, d_A y\right) dT(g),$$

mais il n'est en général pas possible d'inverser les deux signes intégrales ci-dessus. Puisque T est H-invariante, pour tout sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K} \subset H$, on a aussi

$$\langle f, T^\vee\rangle = \int_A \left(\int_{A'} f(y)\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}(g)\, d_A y\right) dT(g). \tag{2.2}$$

Il s'agit de montrer que les deux signes intégrales dans (2.2) peuvent s'inverser, et que la fonction $A \to \mathbb{C}$ définie presque partout par $y \mapsto \int_A \overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}(y)\, dT(y)$ est localement intégrable.

Dans cette section, nous ne démontrerons qu'une partie de la proposition 2.1, à savoir : l'intégrabilité de $T^\vee$ *au voisinage de* 0 *dans* A, la constance locale de $T^\vee$ sur A', et la formule pour $T^\vee(y)$ ($y \in A'$). L'intégrabilité locale de $T^\vee$ sur A sera montrée dans la section 3 (cf. le théorème 3.16).

Étude des restrictions $T^\vee|_{C_c^\infty(A')}$ pour $T \in J_H^*(A)$, d'après [Harish-Chandra 1978] et [Huntsinger 1997]. Fixons un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K} \subset H$. Soit $\Xi \subset {}^G(\mathfrak{A}^{-1})$ la partie G-invariante ouverte et fermée dans A définie en [Lemaire 2004] 1.2. Pour tout sous-groupe de Cartan $\Gamma \subset G$, on pose $L(\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma) \subset A$ et $L(\Gamma)' = L(\Gamma) \cap A'$. Pour $x,\ y \in A$, on pose $\mathrm{ad}\, x(y) = xy - yx$.

Lemme 2.3. *Soient $y,\ g \in A$. Alors l'application $\mathcal{K} \to F,\ k \mapsto \mathrm{tr}'_{A/F}(kyk^{-1}g)$ est submersive au point $k_0 \in \mathcal{K}$ si et seulement si* $\mathrm{ad}\, g(k_0yk_0^{-1}) \neq 0$.

Démonstration. La différentielle de l'application $\mathcal{K} \to F,\ k \mapsto \mathrm{tr}'_{A/F}(kyk^{-1}g)$ au point k_0 s'écrit :

$$A \to F,\ x \mapsto \mathrm{tr}'_{A/F}(\mathrm{ad}\, g(k_0yk_0^{-1})x).$$

Par F-linéarité, cette différentielle est surjective si et seulement si elle est non identiquement nulle ; i.e., si et seulement si $\mathrm{ad}\, g(k_0yk_0^{-1}) \neq 0$. D'où le lemme. □

Lemme 2.4. *Soient $\Gamma \subset G$ un sous-groupe de Cartan et $\Omega \subset A$ une partie compacte modulo G-conjugaison. Alors l'intersection $L(\Gamma) \cap \Omega$ est compacte.*

Démonstration. L'application $A \to F^{nd},\ g \mapsto (a_{nd-1}(g), \dots, a_0(g))$ donnée par les coefficients du polynôme caractéristique réduit de g, est G-invariante ; et sa restriction à $L(\Gamma)$ est propre, à fibres finies. D'où le lemme. □

Proposition 2.5. *Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $\omega \subset A'$ une partie ouverte compacte. Alors il existe un $a \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $y \in \omega$, on a* $\mathrm{Supp}(\overline{\Psi}{}^{\mathcal{K}}_{A,y}|_{\varpi^k\Xi}) \subset \mathfrak{A}^a$.

Démonstration. Pour tout sous-groupe de Cartan $\Gamma \subset G$, l'application

$$\mathcal{K} \times L(\Gamma)' \to A', \quad (k, y) \mapsto kyk^{-1}$$

est partout submersive ; en particulier, l'intersection ${}^{\mathcal{K}}\{L(\Gamma)\} \cap A'$ est ouverte dans A. On en déduit qu'il existe un ensemble fini $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\}$ de sous-groupes de Cartan de G tel que $\omega \subset \bigcup_{i=1}^s {}^{\mathcal{K}}\{L(\Gamma_i)\} \cap A'$. Pour $i = 1, \dots, s$, l'intersection $L(\Gamma_i) \cap \varpi^k\Xi$ est compacte 2.4, par conséquent $X_i = {}^{\mathcal{K}}\{L(\Gamma_i)\} \cap \varpi^k\Xi$ est une partie compacte. Soit $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\bigcup_{i=0}^s X_i \subset \mathfrak{A}^b$, et posons $\Omega = \varpi^k\Xi \cap (A \smallsetminus \mathfrak{A}^b)$. On a donc $(\bigcup_{i=1}^s {}^{\mathcal{K}}\{L(\Gamma_i)\}) \cap \Omega = \varnothing$. Notons que Ω est une partie ouverte et fermée dans A, compacte modulo G-conjugaison. Puisque ${}^{\mathcal{K}}\omega \subset \bigcup_{i=1}^s {}^{\mathcal{K}}\{L(\Gamma_i)\}$, l'application

$$\zeta : \mathcal{K} \times \omega \times \Omega \to F \times \omega \times \Omega,\ (k, y, g) \mapsto (\mathrm{tr}'_{A/F}(kyk^{-1}g), y, g)$$

est partout submersive 2.3. On peut donc lui appliquer le principe de submersion d'Harish-Chandra [1970, theorem 11] (voir [Harish-Chandra 1964, theorem 1] pour la démonstration) : il existe une unique application linéaire surjective

$$C_c^\infty(\mathcal{K} \times \omega \times \Omega) \to C_c^\infty(\zeta(\mathcal{K} \times \omega \times \Omega)),\ \varphi \mapsto \varphi^\zeta$$

telle que

$$\begin{aligned}&\iiint_{\mathcal{K}\times\omega\times\Omega}\varphi(k,y,g)\Phi\circ\zeta(k,y,g)\,d_{\mathcal{K}}k\,d_Ay\,d_Ag\\&=\iiint_{F\times\omega\times\Omega}\varphi^{\zeta}(t,y,g)\Phi(t,y,g)\,dt\,d_Ay\,d_Ag\end{aligned}$$

pour toutes fonctions $\varphi\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{K}\times\omega\times\Omega)$ et $\Phi\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\zeta(\mathcal{K}\times\omega\times\Omega))$; où dt désigne la mesure de Haar sur F normalisée par $\mathfrak{o}_F$. Soit $f_0=(\varphi_0)^{\zeta}$ avec $\varphi_0=\mathbf{1}_{\mathcal{K}\times\omega\times\Omega}$. Fixons un couple $(y,g)\in\omega\times\Omega$. Alors il existe un $c\in\mathbb{Z}$ tel que $y+\mathfrak{A}^c\subset\omega$, $g+\mathfrak{A}^c\subset\Omega$ et ${}^{\mathcal{K}}(\mathfrak{A}^c)\mathfrak{A}^c\subset\mathfrak{A}^{1/d}$ (rappelons que $\Psi_A(\mathfrak{A}^{1/d})=1$). Pour $\lambda\in F^{\times}$, notons $\overline{\Psi}_F^{\lambda}$ le caractère de F défini par $\overline{\Psi}_F^{\lambda}(t)=\overline{\Psi_F(\lambda t)}$. Pour $\varphi=\varphi_0$ et $\Phi=(\overline{\Psi}_F^{\lambda}\otimes\mathbf{1}_{y+\mathfrak{A}^c}\otimes\mathbf{1}_{g+\mathfrak{A}^c})|_{C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\zeta(\mathcal{K}\times\omega\times\Omega))}$, on obtient

$$\int_{\mathcal{K}}\overline{\Psi_A(\lambda kyk^{-1}g)}\,d_{\mathcal{K}}k=\int_F f_0(t,y,g)\overline{\Psi}_F^{\lambda}(t)\,dt.$$

L'égalité ci-dessus est vraie pour tout $(y,g,\lambda)\in\omega\times\Omega\times F^{\times}$.

La fonction f_0 appartient à $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(F\times\omega\times\Omega)=C_{\mathrm{c}}^{\infty}(F)\otimes C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\omega)\otimes C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$. Par conséquent, il existe un $e\in\mathbb{Z}$ tel que pour tout $(y,g)\in\omega\times\Omega$, la fonction $t\mapsto f_0(t,y,g)$ appartient à $C_{\mathrm{c}}(F/\mathfrak{p}_F^e)$. Soit $\lambda_0\in F^{\times}$ l'élément défini par

$$\lambda_0=\begin{cases}1 & \text{si } e\leq 0,\\ \varpi^{-e} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Puisque le conducteur de $\overline{\Psi}_F^{\lambda_0}$ est contenu dans $\mathfrak{p}_F^{1+e}$, pour tout $(y,g)\in\omega\times\Omega$, on a $\int_F f_0(t,y,g)\overline{\Psi}_F^{\lambda}(t)dt=0$, d'où $\overline{\Psi}_y^{\mathcal{K}}(\lambda_0 g)=0$. En d'autres termes, pour tout $(y,g)\in\omega\times\lambda_0\Omega$, on a $\overline{\Psi}_y^{\mathcal{K}}(g)=0$. Puisque $\mathfrak{o}_F\,\Xi=\Xi$ ([Lemaire 2004] 1.2), on a l'inclusion $\lambda_0\Omega\supset\varpi^k\,\Xi\cap(A\smallsetminus\mathfrak{A}^a)$ avec $a=\inf\{b,b-e\}$. D'où la proposition. □

Corollaire 2.6. *Pour $y\in A'$, la fonction $\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}|_{\varpi^k\Xi}$ est à support compact. Et l'application $A'\to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\varpi^k\,\Xi)$, $y\mapsto\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}|_{\varpi^k\Xi}$ est localement constante.*

Démonstration. La première assertion est claire. Quant à la seconde, soit $\omega\subset A'$ une partie ouverte compacte, et choisissons un entier a comme en 2.5. Il existe un entier $c\geq a$ tel que $\omega+\mathfrak{A}^c=\omega$, $(\varpi^k\,\Xi\cap\mathfrak{A}^a)+\mathfrak{A}^c=\varpi^k\,\Xi\cap\mathfrak{A}^a$ et ${}^{\mathcal{K}}(\mathfrak{A}^c)\mathfrak{A}^c\subset\mathfrak{A}^{1/d}$. Alors pour tout $y\in\Omega$, on a $\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}|_{\varpi^k\Xi}\in C(\mathfrak{A}^a/\mathfrak{A}^c)$, et l'application $\omega\to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\varpi^k\,\Xi)$, $y\mapsto\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}|_{\varpi^k\Xi}$ se factorise à travers l'espace quotient $\omega/\mathfrak{A}^c$. □

Proposition 2.7. *Soit $T\in J_H^*(A)$. La transformée de Fourier $T^{\vee}$ est localement constante sur A'. Et pour $y\in A'$, on a $T^{\vee}(y)=\langle\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}},T\rangle$.*

Démonstration. Soient $f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(A')$, $\omega=\mathrm{Supp}(f)$ et $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Supp}(T)\subset\varpi^k\,\Xi$. D'après 2.6, il existe un entier a tel que $\mathrm{Supp}(\overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}|_{\varpi^k\Xi})\subset\mathfrak{A}^a$ pour tout $y\in\omega$.

Et d'après (2.2), on a

$$\langle f, T^\vee\rangle = \int_{\mathfrak{A}^a}\left(\int_\omega f(y)\overline{\Psi}^{\mathcal{H}}_{A,y}(g)\,d_A y\right) dT(g).$$

Puisque l'application $\omega\times\mathfrak{A}^a\to\mathbb{C},\ (y,g)\mapsto f(y)\overline{\Psi}^{\mathcal{H}}_{A,y}(g)$ est localement constante 2.6, on peut inverser les deux signes intégrales ci-dessus. On obtient que

$$\begin{aligned}\langle f, T^\vee\rangle &= \int_\omega f(y)\left\{\int_{\mathfrak{A}^a}\overline{\Psi}^{\mathcal{H}}_{A,y}(g)\,dT(g)\right\} d_A y\\ &= \int_A f(y)\left(\int_A \overline{\Psi}^{\mathcal{H}}_{A,y}(g)\,dT(g)\right) d_A y.\end{aligned}$$

À nouveau d'après 2.6, l'application $A'\to\langle\overline{\Psi}^{\mathcal{H}}_{A,y}, T\rangle = \int_A \overline{\Psi}^{\mathcal{H}}_{A,y}(g)\,dT(g)$ est localement constante. D'où la proposition. □

Descente parabolique. Posons $W^1 = V^1_{(n)}$ avec (convention d'écriture)

$$(n) = (n, 0, \ldots, 0)\in\Pi_n,$$

et pour $i = 2,\ldots,n$, choisissons un sous-D-espace vectoriel W^i de $V^i_{(n)}$ tel que $V^i_{(n)}\cap\Lambda = (V^{i-1}_{(n)}\cap\Lambda)\oplus(W^i\cap\Lambda)$. On a les décompositions $V=\bigoplus_{i=1}^n W^i$ et $\Lambda=\bigoplus_{i=1}^n(W^i\cap\Lambda)$. Soit $\mathfrak{m}_{(n)}$ la sous-F-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}_{(n)}$ définie par $\mathfrak{m}_{(n)}=\{g\in A : g(W^i)\subset W^i,\ i=1,\ldots,n\}$; si $D=F$, $\mathfrak{m}_{(n)}$ est une sous-F-algèbre de Cartan de A. Pour $\alpha\in\Pi_n$, notons $\mathfrak{m}_\alpha$ l'unique sous-F-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}_\alpha$ telle que $\mathfrak{m}_\alpha\supset\mathfrak{m}_{(n)}$, $\bar{\mathfrak{p}}_\alpha$ la sous-F-algèbre parabolique de A opposée à $\mathfrak{p}_\alpha$ par rapport à $\mathfrak{m}_\alpha$, et $\bar{\mathfrak{u}}_\alpha$ le radical nilpotent de $\bar{\mathfrak{p}}_\alpha$. On a les décompositions : $A=\bar{\mathfrak{u}}_\alpha\oplus\mathfrak{m}_\alpha\oplus\mathfrak{u}_\alpha$ et $\mathfrak{A}=(\bar{\mathfrak{u}}_\alpha\cap\mathfrak{A})\oplus(\mathfrak{m}_\alpha\cap\mathfrak{A})\oplus(\mathfrak{u}_\alpha\cap\mathfrak{A})$. Posons $M_\alpha=\mathfrak{m}_\alpha\cap G$ et $M_{H,\alpha}=M_\alpha\cap H$. Notons A_α le centre de M_α, et posons $A_{H,\alpha}=A_\alpha\cap H$.

Soit $\alpha\in\Pi_n$. Soient dm, du et $d\bar{u}$ les mesures de Haar respectivement sur $\mathfrak{m}_\alpha$, $\mathfrak{u}_\alpha$ et $\bar{\mathfrak{u}}_\alpha$ normalisées par $\mathfrak{A}$; et dm et du les mesures de Haar respectivement sur M_α et U_α normalisées par K_H. On note encore $f\mapsto f^\vee$ la transformée de Fourier sur $C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathfrak{m}_\alpha)$ définie par $f^\vee(y)=\int_{\mathfrak{m}_\alpha} f(m)\overline{\Psi_A(ym)}\,dm$, et $T\mapsto T^\vee$ la transformée de Fourier sur $\mathfrak{D}(\mathfrak{m}_\alpha)$ définie par $\langle f, T^\vee\rangle=\langle f^\vee, T\rangle$ ($f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathfrak{m}_\alpha)$).

Pour $f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(A)$, notons $f_{H,\mathfrak{p}_\alpha}\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathfrak{m}_\alpha)$ la fonction définie par

$$f_{H,\mathfrak{p}_\alpha}(m)=\iint_{\mathfrak{u}_\alpha\times K_H} f(k^{-1}(m+u)k)\,du\,dk.$$

Et pour $T\in\mathfrak{D}(\mathfrak{m}_\alpha)$, notons $T_{H,\mathfrak{p}_\alpha}\in\mathfrak{D}(A)$ la distribution définie par

$$\langle f, T_{H,\mathfrak{p}_\alpha}\rangle=\langle f_{H,\mathfrak{p}_\alpha}, T\rangle.$$

Posons $\mu_\alpha=\mathrm{vol}(\mathfrak{u}_\alpha\cap\mathfrak{A}^{1/d}, du)$ ($=[\mathfrak{u}_\alpha\cap\mathfrak{A} : \mathfrak{u}_\alpha\cap\mathfrak{A}^{1/d}]$).

Lemme 2.8. *Pour $f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(A)$, on a $(f^\vee)_{H,\mathfrak{p}_\alpha}=\mu_\alpha(f_{H,\mathfrak{p}_\alpha})^\vee$.*

Démonstration. Soit $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(A)$. Pour $(k, m_1, u_1) \in K_H \times \mathfrak{m}_\alpha \times \mathfrak{u}_\alpha$, on a

$$\begin{aligned} f^\vee(k^{-1}(m_1+u_1)k) &= \int_A f(k^{-1}gk)\overline{\Psi_A((m_1+u_1)g)}\, d_A g \\ &= \int_{\bar{u}_\alpha} \overline{\Psi_A(u_1\bar{u})} F_{f,k,m_1}(\bar{u})\, d\bar{u} \end{aligned}$$

avec $F_{f,k,m_1}(\bar{u}) = \iint_{\mathfrak{m}_\alpha \times \mathfrak{u}_\alpha} f(k^{-1}(\bar{u}+m+u)k)\overline{\Psi_A(m_1(m+u))}\, dm\, du$. D'où l'on déduit que

$$(f^\vee)_{H,\mathfrak{p}_\alpha}(m_1) = c \int_{\mathfrak{u}_\alpha} \left\{ \int_{\bar{u}_\alpha} \overline{\Psi_A(u\bar{u})} F_{f,m_1}(\bar{u})\, d\bar{u} \right\} du$$

avec $F_{f,m_1}(\bar{u}) = \int_{K_H} F_{f,k,m_1}(\bar{u})\, dk$. Comme $F_{f,m_1} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\bar{\mathfrak{u}}_\alpha)$, il existe un entier a tel que $F_{f,m_1} \in C_{\mathrm{c}}(\bar{\mathfrak{u}}_\alpha/(\bar{\mathfrak{u}}_\alpha \cap \mathfrak{U}^a))$. Un calcul facile montre alors que

$$\begin{aligned} (f^\vee)_{H,\mathfrak{p}_\alpha}(m_1) &= F_{f,m_1}(0) \iint_{(\mathfrak{u}_\alpha \cap \mathfrak{A}^{(1/d)-a}) \times (\bar{\mathfrak{u}}_\alpha \cap \mathfrak{A}^a)} \overline{\Psi_A(u\bar{u})}\, du\, d\bar{u} \\ &= F_{f,m_1}(0) \operatorname{vol}(\mathfrak{u}_\alpha \cap \mathfrak{A}^{(1/d)-a}, du) \operatorname{vol}(\bar{\mathfrak{u}}_\alpha \cap \mathfrak{A}^a, d\bar{u}). \end{aligned}$$

Or $F_{f,m_1}(0) = (f_{H,\mathfrak{p}_\alpha})^\vee(m_1)$, $\operatorname{vol}(\mathfrak{u}_\alpha \cap \mathfrak{A}^{(1/d)-a}, du) = \mu_\alpha \operatorname{vol}(\mathfrak{u}_\alpha \cap \mathfrak{A}^a, du)^{-1}$ et $\operatorname{vol}(\bar{\mathfrak{u}}_\alpha \cap \mathfrak{A}^a, d\bar{u}) = \operatorname{vol}(\mathfrak{u}_\alpha \cap \mathfrak{A}^a, du)$. D'où le lemme. □

Pour tout sous-groupe de Cartan $\Gamma \subset G$, on note A_Γ le sous-tore F-déployé maximal de Γ, $d_{A_\Gamma}a$ la mesure de Haar sur A_Γ normalisée par le sous-groupe compact maximal de A_Γ, et $d_\Gamma\gamma$ la mesure de Haar sur Γ telle que $\operatorname{vol}(A_{\Gamma_H}\backslash\Gamma_H, \frac{d_\Gamma\gamma}{d_{A_\Gamma}a}) = 1$; où l'on a posé $\Gamma_H = \Gamma \cap H$ et $A_{\Gamma_H} = A_\Gamma \cap H$. Si $\gamma \in A'$, alors le centralisateur $\Gamma = G_\gamma$ est un sous-groupe de Cartan de G, et l'on note $\Phi_H(\,\cdot\,, \gamma)$ la distribution H-invariante sur A définie par

$$\Phi_H(f, \gamma) = \int_{\Gamma_H\backslash H} f(g^{-1}\gamma g)\, \frac{dh}{d_\Gamma\gamma}.$$

Puisque l'orbite $\mathcal{O}_H(\gamma)$ est fermée dans A, l'intégrale ci-dessus est absolument convergente. Notons que pour $g \in G$ et $\gamma \in A'$, on a

$$\Phi_H(\,\cdot\,, g^{-1}\gamma g) = \operatorname{Ad} g^{-1}(\Phi_H(\,\cdot\,, \gamma)).$$

De la même manière, si $\gamma \in \mathfrak{m}_\alpha \cap A'$ pour un $\alpha \in \Pi_n$, on note $\Phi_{M_{H,\alpha}}(\,\cdot\,, \gamma)$ la distribution $M_{H,\alpha}$-invariante sur $\mathfrak{m}_\alpha$ définie par

$$\Phi_{M_{H,\alpha}}(f, \gamma) = \int_{\Gamma_H\backslash M_{H,\alpha}} f(m^{-1}\gamma m) \frac{dm}{d_\Gamma\gamma}.$$

Lemme 2.9. *Soit $T \in \mathfrak{D}(\mathfrak{m}_\alpha)$ une distribution $M_{H,\alpha}$-invariante et localement intégrable. Alors la distribution $T_{H,\mathfrak{p}_\alpha}$ est H-invariante et localement intégrable. Si de* *plus T est une distribution localement constante sur $\mathfrak{m}_\alpha \cap A'$, alors la distribution $T_{H,\mathfrak{p}_\alpha}$ est localement constante sur A'.*

Démonstration. Mutatis mutandis, la démonstration est celle du lemme 1.8 de [Lemaire 2004]. Pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$, on a la formule d'intégration

$$\int_H f(h)\,dh = \iiint_{M_{H,\alpha}\times U_\alpha \times K_H} f(muk)\,dm\,du\,dk.$$

Grâce à la cette formule, pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$ et tout élément $\gamma \in \mathfrak{m}_\alpha \cap A'$, on montre la formule de descente

$$\Phi_{M_{H,\alpha}}(f_{H,\mathfrak{p}_\alpha}, \gamma) = |\eta_{\mathfrak{m}_\alpha \backslash A}(\gamma)|^{1/2}\Phi_H(f, \gamma) \tag{2.10}$$

où $\eta_{\mathfrak{m}_\alpha \backslash A}(\gamma) = \det_F(\operatorname{ad}\gamma; \mathfrak{m}_\alpha \backslash A)$. Comme dans la démonstration de [Lemaire 2004, 1.8], l'égalité (2.10), injectée dans les formules d'intégration de Weyl pour $M_{H,\alpha}$ et H, implique toutes les assertions du lemme. □

Pour $\alpha \in \Pi_n$, on note $\mathfrak{m}'_{\alpha,\mathrm{e}}$ l'ensemble des $\gamma \in \mathfrak{m}_\alpha \cap A'$ tels que le centralisateur G_γ est compact modulo A_α. On a la décomposition

$$A' = \coprod_{\alpha\in\Pi_n} {}^G\{\mathfrak{m}'_{\alpha,\mathrm{e}}\} = \coprod_{\alpha\in\Pi_n} {}^H\{\mathfrak{m}'_{\alpha,\mathrm{e}}\}. \tag{2.11}$$

Soient $\alpha \in \Pi_n$ et $\gamma \in \mathfrak{m}'_{\alpha,\mathrm{e}}$. D'après 2.8 et (2.10), pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$, on a

$$\Phi_{M_{H,\alpha}}((f_{H,\mathfrak{p}_\alpha})^\vee, \gamma) = \mu_\alpha^{-1}|\eta_{\mathfrak{m}_\alpha \backslash A}(\gamma)|^{1/2}\Phi_H(f^\vee, \gamma). \tag{2.12}$$

Par conséquent 2.9, si la distribution $\Phi_{M_{H,\alpha}}(\,\cdot\,, \gamma)^\vee \in J_{M_{H,\alpha}}(\mathfrak{m}_\alpha)$ est localement intégrable sur $\mathfrak{m}_\alpha$, alors la distribution $\Phi_H(\,\cdot\,,\gamma)^\vee \in J_H(A)$ est localement intégrable sur A. Rappelons que d'après la proposition 2.7, on sait déjà que pour $y \in A'$, la distribution $\Phi_H(\,\cdot\,, y)^\vee$ est localement constante sur A'. D'où le

Lemme 2.13. *On suppose que pour tout $\gamma \in A'_{\mathrm{e}}$, la distribution $\Phi_H(\,\cdot\,,\gamma)^\vee$ est localement intégrable sur A (resp. intégrable au voisinage de 0 dans A). Alors pour tout $y \in A'$, la distribution $\Phi_H(\,\cdot\,, y)^\vee$ est localement intégrable sur A (resp. intégrable au voisinage de 0 dans A).*

Démonstration. Par récurrence sur la dimension de A, grâce à (2.11), (2.12) et 2.9. Notons que si $\alpha \in \Pi_n$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{A}^b)$ pour un $b \in \mathbb{Z}$, alors $f_{H,\mathfrak{p}_\alpha} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{A}^b)$. □

Intégrabilité des distributions $\Phi_H(\,\cdot\,,\gamma)^\vee$ ($\gamma \in A'_{\mathrm{e}}$) au voisinage de 0 dans A. Soit dz la mesure de Haar sur Z ($= F^\times$) normalisée par $\mathfrak{o}_F^\times$. Pour $\gamma \in A'_{\mathrm{e}}$, on a donc $\Phi_H(f,\gamma) = \int_{Z_H\backslash H} f(h^{-1}\gamma h)(dh/dz)$, où $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$.

Fixons un système de représentants $\mathscr{C}_{H,\mathrm{e}}(G)$ dans G des classes de H-conjugaison de sous-groupes de Cartan elliptiques de G.

Lemme 2.14 [Harish-Chandra 1978, part I, §2, lemma 1]. *Soit $\theta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A'_{\mathrm{e}})$. Alors pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$, on a*

$$\int_{Z_H\backslash H} \left| \int_A f(g)\theta^\vee(h^{-1}gh)\, d_A g \right| \frac{dh}{dz} < +\infty.$$

Démonstration. D'après le début de la démonstration du corollaire 2.6, il existe un sous-ensemble fini $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\} \subset \mathscr{C}_{H,\mathrm{e}}(G)$ tel que $\mathrm{Supp}(\theta) \subset \bigcup_{i=1}^s {}^H\{L(\Gamma_i)\}$. Pour $i = 1, \dots, s$, l'intersection $X_i = {}^H\{L(\Gamma_i)\} \cap \mathrm{Supp}(\theta) \subset {}^H\{L(\Gamma_i)'\}$ est ouverte et compacte (rappelons que ${}^H\{L(\Gamma_i)'\}$ est ouvert et fermé dans A'_{e}). On a $\theta = \theta_1 + \cdots + \theta_s$ avec $\theta_i = \theta|_{X_i} \in C_{\mathrm{c}}^\infty({}^H\{L(\Gamma_i)'\})$. On peut donc supposer que $\theta \in C_{\mathrm{c}}^\infty({}^H\{L(\Gamma)'\})$ pour un $\Gamma \in \mathscr{C}_{H,\mathrm{e}}(G)$. Soit $d_{L(\Gamma)}\gamma$ la mesure de Haar sur $L(\Gamma)$ définie par $|\det_F(y \mapsto \gamma y; L(\Gamma))| d_\Gamma \gamma = d_{L(\Gamma)}\gamma$.

Pour $h \in H$, on a $\int_A f(g)\theta^\vee(h^{-1}gh)\, d_A g = \int_A f^\vee(g)\theta^h(g)\, d_A g$ avec $\theta^h(g) = \theta(h^{-1}gh)$; et puisque $\mathrm{Supp}(\theta) \subset {}^H\{L(\Gamma)\}$, la formule d'intégration de Weyl pour G implique que

$$\int_A f^\vee(g)\theta(h^{-1}gh)\, d_A g = c \int_{L(\Gamma)'} |\eta(\gamma)| \Theta_{H,\gamma}(f^\vee \cdot \theta^h)\, d_{L(\Gamma)}\gamma$$

avec

$$c = |\mathrm{N}_H(\Gamma_H)/\Gamma_H|^{-1} \quad (\text{où } \mathrm{N}_H(\Gamma_H) = \{h \in H : h^{-1}\Gamma_H \gamma = \Gamma_H\})$$

et

$$\eta(\gamma) = \det_F(\mathrm{ad}\,\gamma; L(\Gamma)\backslash A).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{Z_H\backslash H} &\left| \int_A f(g)\theta^\vee(h^{-1}gh)\, d_A g \right| \frac{dh}{dz} \\ &\leq c \int_{L(\Gamma)'} |\eta(\gamma)| \left(\int_{Z_H\backslash H} |\Theta_{H,\gamma}(f^\vee \cdot \theta^h)| \frac{dh}{dz} \right) d_{L(\Gamma)}\gamma \\ &\leq c \int_{L(\Gamma)'} |\eta(\gamma)| \Theta_{H,\gamma}(|f^\vee|)\Theta_{H,\gamma}(|\theta|)\, d_{L(\Gamma)}\gamma.\end{aligned}$$

La fonction $\gamma \mapsto |\eta(\gamma)|$ est localement constante sur $L(\Gamma)'$; et d'après [Harish-Chandra 1980], pour toute fonction $h \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$, la fonction $\gamma \mapsto \Theta_{H,\gamma}(h)$ est localement constante sur $L(\Gamma)'$. Comme $\Theta_{H,\cdot}(|\theta|) \in C_{\mathrm{c}}^\infty(L(\Gamma)')$, la dernière intégrale ci-dessus est convergente. D'où le lemme. □

Pour $\theta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A'_{\mathrm{e}})$, notons $T_{H,\theta}$ la distribution sur A définie par la lemme 2.14

$$\langle f, T_{H,\theta} \rangle = \int_{Z_H\backslash H} \left(\int_A f(g)\theta^\vee(h^{-1}gh)\, d_A g \right) \frac{dh}{dz}.$$

On a clairement (cf. la démonstration ci-dessus) : $T_{H,\theta} \in J_H(X_\theta)^\vee$ avec $X_\theta = \overline{{}^H\{\mathrm{Supp}(\theta)\}}$. Et puisque X_θ est contenu dans $\varpi^k \Xi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, on a $T_{H,\theta} \in J_H^*(A)^\vee$. En particulier (voir la proposition 2.7), la distribution $T_{H,\theta}$ est localement constante sur A'.

Proposition 2.15. *Soit $\theta \in C_\mathrm{c}^\infty(A'_\mathrm{e})$. Alors la distribution $T_{H,\theta}$ est intégrable au voisinage de* 0 *dans A.*

Démonstration. Soit $T_{G,\theta}^+$ la distribution sur A définie par le lemme 2.14

$$\begin{aligned}\langle f, T_{G,\theta}^+\rangle &= \int_{Z\backslash G} \left| \int_A f(x)\theta^\vee(g^{-1}xg)\, d_A x \right| \frac{dg}{dz} \\ &= \int_{Z\backslash G} \left| \int_A f^\vee(x)\theta(g^{-1}xg)\, d_A x \right| \frac{dg}{dz}.\end{aligned}$$

Puisque $T_{G,\theta}^+ \in J_G^*(A)^\vee$, d'après la proposition 1.6, il existe un entier b et des constantes c_α ($\alpha \in \Pi_n$) tels que

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}^b} \cdot \left(T_{G,\theta}^+ - \sum_{\alpha \in \Pi_n} c_\alpha \Theta_\alpha^\vee \right) = 0.$$

Par conséquent [Lemaire 2004, 1.10/3], la distribution $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}^b} \cdot T_{G,\theta}^+$ est intégrable sur A. Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de H. D'après la proposition 2.7, pour $y \in A'$, on a

$$T_{G,\theta}^+(y) = \int_{Z\backslash G} \left| \int_A \overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}(-x)\theta(g^{-1}xg)\, d_A x \right| \frac{dg}{dz}.$$

On en déduit que la fonction

$$A' \times (Z_H\backslash H) \to \mathbb{C},\ (y, h) \mapsto \int_A \overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}(-x)\theta(h^{-1}xh)\, d_A x$$

est intégrable sur $\mathfrak{A}^b \times (Z_H\backslash H)$ par rapport à la mesure produit. On peut donc appliquer le théorème de Fubini : pour presque tout $y \in \mathfrak{A}^b$, la fonction $Z_H\backslash H \to \mathbb{C}$, $h \mapsto F_y(h) = \int_A \overline{\Psi}_{A,y}^{\mathcal{K}}(-x)\theta(h^{-1}xh)\, d_A x$ est intégrable sur $Z_H\backslash H$; pour toute fonction $f \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathfrak{A}^b)$, la fonction $F_f : A \to \mathbb{C}$ définie presque partout par $F_f(y) = f(y)\int_{Z_H\backslash H} F_y(h)(dh/dz)$ est intégrable sur A ; et l'on a $\langle f, T_{H,\theta}\rangle = \int_A F_f(y)\, d_A y$. Puisque pour tout $y \in A'$ on a $T_{H,\theta}(y) = \int_{Z_H\backslash H} F_y(h)(dh/dz)$ (toujours par la proposition 2.7), la proposition est démontrée. □

Proposition 2.16. *Soit $\gamma \in A'_\mathrm{e}$. Alors il existe une fonction $\theta \in C_\mathrm{c}^\infty(A'_\mathrm{e})$ telle que $\Phi_H(\,\cdot\,, \gamma)^\vee = T_{H,\theta}$.*

Démonstration. Une simple adaptation de la démonstration de [Harish-Chandra 1980, théorème 4] montre que pour tout $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$, l'application $A'_{\mathrm{e}} \to j^{\nu}(J_H(A))$, $y \mapsto j^{\nu}(\Phi_H(\cdot\,, y))$ est localement constante.

Posons $\Gamma = G_{\gamma}$. Soit $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(A)$, et soit ω un voisinage ouvert compact de γ dans $L(\Gamma)'$ tel que $\Phi_H(f^{\vee}, y) = \Phi_H(f^{\vee}, \gamma)$ pour tout $y \in \omega$. Puisque l'application $\zeta : H \times \omega \to {}^{H}\{L(\Gamma)'\}$, $(h, y) \mapsto h^{-1}yh$ est partout submersive, il existe une unique application linéaire surjective [Harish-Chandra 1970, theorem 11]

$$C_{\mathrm{c}}^{\infty}(H \times \omega) \to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\zeta(H \times \omega)),\ \varphi \mapsto \varphi^{\zeta}$$

telle que

$$\iint_{H\times\omega} \varphi(h, y)\Phi \circ \zeta(h, y)\, dh\, d_{L(\Gamma)}y = \int_A \varphi^{\zeta}(g)\Phi(g)\, d_A g$$

pour toutes fonctions $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(H \times \omega)$ et $\Phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\zeta(H \times \omega))$; où $d_{L(\Gamma)}y$ est la mesure de Haar sur $L(\Gamma)$ définie comme dans la démonstration du lemme 2.14. Choisissons une fonction $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(H \times \omega)$ telle que $\iint_{H\times\omega} \varphi(h, y)\, dh\, d_{L(\Gamma)}y = 1$, posons $\theta = \varphi^{\zeta}$, et notons $\varphi_{\zeta} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\omega)$ la fonction $y \mapsto \int_H \varphi(h, y)\, dh$. Alors $\theta \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(A')$, et l'on a

$$\begin{aligned}\langle f, T_{H,\theta}\rangle &= \int_{Z_H\backslash H} \left(\int_A f^{\vee}(hgh^{-1})\varphi^{\zeta}(g)\, d_A g\right)\frac{dh}{dz}\\ &= \int_{Z_H\backslash H}\left(\iint_{H\times\omega} f^{\vee}(hh'^{-1}yh'h^{-1})\varphi(h', y)\, dh'\, d_{L(\Gamma)}y\right)\frac{dh}{dz}.\end{aligned}$$

Mais puisque

$$\int_{Z_H\backslash H}\left(\iint_{H\times\omega} |f^{\vee}(hh'^{-1}yh'h^{-1})||\varphi(h', y)|\, dh'\, d_{L(\Gamma)}y\right)\frac{dh}{dz} < +\infty$$

(cf. la démonstration du lemme 2.14), on peut appliquer le théorème de Fubini. On obtient :

$$\begin{aligned}\langle f, T_{H,\theta}\rangle &= \int_{H\times\omega} \Phi_H(f^{\vee}, y)\varphi(h', y)\, dh'\, d_{L(\Gamma)}y\\ &= \int_{\omega} \Phi_H(f^{\vee}, y)\varphi_{\zeta}(y)\, d_{L(\Gamma)}y\\ &= \Phi_H(f^{\vee}, \gamma)\end{aligned}$$

car $\int_{\omega} \varphi_{\zeta}(y)\, d_{L(\Gamma)}y = 1$. □

Corollaire 2.17. *La distribution*

$$\Phi_H(\cdot\,, \gamma)^{\vee}$$

est intégrable au voisinage de 0 *dans* A.

***Germes de Shalika au voisinage de* 0 *dans* A.** Puisque H est ouvert dans G, pour $y \in A$, le centralisateur H_y est ouvert dans G_y. D'après [Laumon 1996, 4.8.6] et la démonstration de [Lemaire 2004, 1.10/1], pour $y \in A$, le centralisateur G_y est unimodulaire ; donc H_y est unimodulaire.

Lemme 2.18. *Soient $y \in A$ et dh_y une mesure de Haar sur H_y. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(A)$, l'intégrale orbitale*

$$\Phi_H(f, y, dh_y) = \int_{H_y\backslash H} f(h^{-1}yh)\,\frac{dh}{dh_y}$$

est absolument convergente; *i.e.*, $\Phi_H(\,\cdot\,, y, dh_y) \in J_H(A)$.

Démonstration. Puisque ZH est un sous-groupe d'indice fini de G, $H_y\backslash H$ est un sous-groupe d'indice fini de $G_y\backslash G$. On peut donc supposer que $H = G$. Les composantes F-irréductibles du polynômes caractéristique réduit de y définissent, comme en [Lemaire 1997, 2.8], un sous-groupe de Lévi M' de G et un sous-groupe parabolique P'' de M' [Lemaire 2004, section 5]). Soit U'' le radical unipotent de P''. Choisissons une décomposition de Lévi $P'' = MU''$, et un sous-groupe parabolique P' de G de composante de Lévi M'. Soit U' le radical unipotent de P'. Alors $P = P''U'$ est un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent $U = U''U'$, et $P = MU$ est une décomposition de Lévi de P. Notons $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{p}''$ (etc.) les sous-F-algèbres de A correspondant à M', P'' (etc.). Par construction, on a $y \in \mathfrak{p}''$ et $G_y \subset P''$. Écrivons $y = x + u$ avec $x \in \mathfrak{m}$ et $u \in \mathfrak{u}''$. Comme dans [Laumon 1996, 4.8.4], on montre que l'orbite $\mathcal{O}_M(x)$ est fermée dans $\mathfrak{m}$, et que $\overline{\mathcal{O}_{P''}(y)} = \mathcal{O}_M(x) \oplus \mathfrak{u}''$. On en déduit (voir [Lemaire 1997, 2.8.2]) que $\overline{\mathcal{O}_P(y)} = \mathcal{O}_M(x) \oplus \mathfrak{u}$. Le reste de la démonstration est une simple adaptation de celle de la proposition 3.2.2 de [Lemaire 1997]. Plus précisément : quitte à remplacer y par $h^{-1}yh$ (resp. P par $h^{-1}Ph$, M par $h^{-1}Mh$) pour un $h \in H$, on peut supposer que $P = P_\alpha$ et $M = M_\alpha$ pour un $\alpha \in \Pi_n$. Alors on montre qu'il existe une (unique) mesure de Haar dm_x sur $(M_{H,\alpha})_x$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(A)$, on a la formule de descente

$$\Phi_H(f, y, dh_y) = \Phi_{M_{H,\alpha}}(f_{H,\mathfrak{p}_\alpha}, x, dm_x) \tag{2.19}$$

avec

$$\Phi_{M_{H,\alpha}}(\phi, x, dm_x) = \int_{(M_{H,\alpha})_x\backslash M_{H,\alpha}} \phi(m^{-1}xm)\frac{dm}{dm_x} \qquad (\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_\alpha)).$$

Puisque la $M_{H,\alpha}$-orbite $\mathcal{O}_{M_{H,\alpha}}(x)$ est fermée dans $\mathfrak{m}_\alpha$, l'intégrale ci-dessus est absolument convergente. □

Pour chaque élément $y \in A$, choisissons une mesure de Haar dh_y sur H_y, et posons $\Phi_H(\,\cdot\,, y) = \Phi_H(\,\cdot\,, y, dh_y) \in J_H(A)$. On suppose que ces mesures dh_y ($y \in A$) vérifient les propriétés suivantes :

– Pour tout $(y, y', g) \in A \times A \times G$ tel que $g^{-1}yg = y'$, $dh_{y'}$ est la mesure de Haar sur $H_{y'}$ déduite de dh_y via l'isomorphisme de groupes $H_y \to H_{y'}$, $x \mapsto g^{-1}xg$. Ainsi, pour tout $(y, g) \in A \times H$, on a $\Phi_H(\cdot, g^{-1}yg) = \mathrm{Ad}\, g^{-1}(\Phi_H(\cdot, y))$.
– Pour $y \in A'$, la distribution $\Phi_H(\cdot, y)$ coïncide avec celle définie précédemment ; i.e., $dh_y = d_\Gamma y|_{\Gamma_H}$ où $\Gamma = G_y$.
– Pour tout $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, on a $\Phi_H(\cdot, n_{\alpha,x}) = \Theta_{\alpha,\bar{x}}$.

Ordonnons les H-orbites de $\mathfrak{N}$ de manière à former une *décomposition standard* ; i.e., écrivons $\mathfrak{N} = \coprod_{i=0}^{s} \mathcal{O}_i$ avec
– pour $i = 0, \dots s$, $\mathcal{O}_i$ est une H-orbite nilpotente,
– pour $i = 0, \dots, s-1$, $\dim(\mathcal{O}_i) \leq \dim(\mathcal{O}_{i+1})$.

Pour $k = 0, \dots, s$, posons $\mathfrak{N}_k = \coprod_{i=0}^{k} \mathcal{O}_i$. Puisque ZH est un sous-groupe d'indice fini de G, le corollaire 5.2 de [Lemaire 2004] reste vrai si l'on remplace G par H. On en déduit que pour $k = 0, \dots, s$, $\mathfrak{N}_k$ est fermé dans A et $\mathcal{O}_k$ est ouvert dans $\mathfrak{N}_k$. Pour $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, on note $i(\alpha, \bar{x})$ l'unique $i \in \{0, \dots, s\}$ tel que $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}$.

Lemme 2.20. *Pour tout $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$, il existe un jeu de fonctions $\{f_k\}_{k=0}^{s} \subset C_c^\infty(\mathfrak{A}^\nu)$ tel que*

(1) $\mathrm{Supp}(f_k) \cap \mathfrak{N}_k \subset \mathcal{O}_k$,

(2) $\langle f_k, \Theta_i \rangle = \delta_{k,i}$ $(i = 0, \dots, s)$.

Démonstration. Elle est identique à celle du lemme 3.5.1 de [Lemaire 1997]. □

Toute fonction Φ définie au voisinage de 0 dans A, induit un *germe de fonctions au point* 0 *dans* A, que l'on note $[\Phi]_0$ (cf. [Lemaire 1997, 3.5]).

Proposition 2.21. *Il existe une unique famille $\{\Gamma_{\alpha,\bar{x}} : (\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}\}$ de germes de fonctions au point* 0 *dans* A, *telle que*

$$[\Phi_H(f, \cdot)]_0 = \sum_{(\alpha,\bar{x})} \langle f, \Theta_{\alpha,\bar{x}} \rangle \Gamma_{\alpha,\bar{x}} \qquad (f \in C_c^\infty(A))$$

où $(\alpha, \bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$. De plus, ces germes sont donnés par $\Gamma_{\alpha,\bar{x}} = [\Phi_H(f_{i(\alpha,\bar{x})}, \cdot)]_0$ pour tout jeu de fonctions $\{f_i\}_{i=0}^{s} \subset C_c^\infty(A)$ vérifiant les conditions (1) et (2) du lemme 2.20.

Démonstration. Elle est identique à celle de la proposition 3.5.2 de [Lemaire 1997]. □

Remarque 2.22. D'après (2.10) et le début de la démonstration de 2.16, pour tout $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$, l'application $A' \to j^\nu(J_H(A))$, $y \mapsto j^\nu(\Phi_H(\cdot, y))$ est localement constante. On en déduit que les germes $\Gamma_{\alpha,\bar{x}}$ $((\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n})$ sont localement constants sur A'.

Le groupe G opère naturellement (à gauche) sur $\Pi_{H,n}$: pour $g \in G$ et $(\alpha, \bar{x})$, on pose $g \cdot (\alpha, \bar{x}) = (\alpha, g \cdot \bar{x})$, avec $g \cdot \bar{x} = \delta_\alpha(gxg^{-1})$ (cf. la section 1 pour la définition de δ_α). Puisque pour tout $(y, g) \in G \times A$, on a $\Phi_H(\cdot, g^{-1}yg) = \mathrm{Ad}\, g^{-1}(\Phi_H(\cdot, y))$, la propriété d'unicité dans 2.21 implique que pour tous $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$ et $g \in G$, on a $\mathrm{Ad}^* g(\Gamma_{\alpha,\bar{x}})$ $(= \Gamma_{\alpha,\bar{x}} \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}) = \Gamma_{\alpha,g\cdot\bar{x}}$.

Pour $y \in A$, notons $d\tilde{g}_y$ l'unique mesure de Haar sur G_y prolongeant dh_y, et posons $dg_y = (\Delta_H\Delta_y : \Delta_H(F^\times)^n)^{-1}\, d\tilde{g}_y$ avec $\Delta_y = \det'(G_y)$. Soit $\Phi_G(\,\cdot\,, y)$ ($y \in A$) la distribution G-invariante sur A définie par $\Phi_G(f, y) = \int_{G_y\backslash G} f(g^{-1}yg)\frac{dg}{dg_y}$. Alors 2.21, il existe une unique famille $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in \Pi_n\}$ de germes de fonctions au point 0 dans A, telle que

$$[\Phi_G(f, \cdot)]_0 = \sum_{\alpha\in\Pi_n} \Phi_G(f, n_\alpha)\Gamma_\alpha \qquad (f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)).$$

Puisque

$$\Phi_G(\,\cdot\,, y) = \sum_{g\in HZ\backslash G} \Phi_H(\,\cdot\,, g^{-1}yg) \qquad (y \in A)$$

et

$$\Phi_G(\,\cdot\,, n_\alpha) = \sum_{g\in HZ\backslash G} \Phi_H(\,\cdot\,, g^{-1}n_\alpha g) \qquad (\alpha \in \Pi_n),$$

on a (calcul facile)

$$\Gamma_\alpha = \sum_{\bar{x}} \Gamma_{\alpha,\bar{x}} \qquad (\alpha \in \Pi_n)$$

où $\bar{x}$ parcourt les éléments de $\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times$.

Choisissons un jeu de fonctions $\{f_i\}_{i=0}^s \subset C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$ vérifiant les conditions (1) et (2) du lemme 2.20, et pour $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, notons $\Gamma_{\alpha,\bar{x}}$ la fonction sur A définie par $\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(g) = \Phi_G(f_{i(\alpha,\bar{x})}, g)$. D'après 2.21, on a $[\Gamma_{\alpha,\bar{x}}]_0 = \Gamma_{\alpha,\bar{x}}$; et fixée une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$, il existe un voisinage ouvert H-invariant $\mathcal{V} = \mathcal{V}(f, \{f_i\}_{i=0}^s)$ de 0 dans A tel que $(\Phi_H(f, .) - \sum_{(\alpha,\bar{x})}\langle f, \Theta_{\alpha,\bar{x}}\rangle\Gamma_{\alpha,\bar{x}})|_{\mathcal{V}} = 0$. La proposition suivante précise ce résultat.

Proposition 2.23. *Soit $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$. Il existe un $a = a(\nu, \{f_i\}_{i=0}^s) \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $g \in \varpi^a\,\Xi$ et toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}(A/\mathfrak{A}^\nu)$, on a*

$$\Phi_H(f, g) = \sum_{(\alpha,\bar{x})} \langle f, \Theta_{\alpha,\bar{x}}\rangle\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(g)$$

où $(\alpha, \bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$.

Démonstration. Pour $t \in F^\times$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$, on note $f_t \in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$ la fonction définie par $f_t(g) = f(t^{-1}g)$; et pour $T \in \mathfrak{D}(A)$, on note T_t la distribution sur A définie par $\langle f, T_t\rangle = \langle f_t, T\rangle$. Soient $\Omega \subset A$ une partie H-invariante fermée, et $b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $t \in F^\times$, l'application $T \mapsto T_t$ induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $j^{(1/d)-b}(J_H(\Omega)) \to j^{(1/d)-b-\omega(t)}(J_H(t^{-1}\Omega))$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. D'après 1.6, il existe un entier b telle que pour toute distribution $T\in J_H(\varpi^k\Omega)$, il existe des constantes $c_{\alpha,\bar{x}}(T)$ ($(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$) telles que

$$(*)\qquad j^{(1/d)-b}\Big(T-\sum_{(\alpha,\bar{x})}c_{\alpha,\bar{x}}(T)\Theta_{\alpha,\bar{x}}\Big)=0$$

où $(\alpha,\bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$. Choisissons un élément $t\in F\smallsetminus\mathfrak{p}_F$ tel que

$$\frac{1}{d}-b-\omega(t)\geq\nu\quad\text{et}\quad\{f_i\}_{i=0}^{s}\subset C_{\mathrm{c}}(A/\mathfrak{A}^{(1/d)-b-\omega(t)}).$$

Soit $a=k-\omega(t)$. Pour $T\in J_H(\varpi^a\,\Xi)$, posons $\tilde{c}_{\alpha,\bar{x}}(T)=c_{\alpha,\bar{x}}(T_{t^{-1}})$ ($(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$). D'après (*), on a

$$(**)\qquad j^{(1/d)-b-\omega(t)}\Big(T-\sum_{(\alpha,\bar{x})}\tilde{c}_{\alpha,\bar{x}}(T)\Theta_{\alpha,\bar{x}}\Big)=0$$

où $(\alpha,\bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$. Puisque

$$C_{\mathrm{c}}(A/\mathfrak{A}^{(1/d)-b})\subset C_{\mathrm{c}}(A/\mathfrak{A}^{(1/d)-b-\omega(t)}),$$

pour $T\in J_H(\varpi^k\Omega)$, on a $\tilde{c}_{\alpha,\bar{x}}(T)=c_{\alpha,\bar{x}}(T)$ ($(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$) ; on peut donc poser $c_{\alpha,\bar{x}}(T)=\tilde{c}_{\alpha,\bar{x}}(T)$ ($T\in J_H(\omega^a\,\Xi)$). Pour $g\in\varpi^a\,\Xi$, l'intégrale orbitale $\Phi_H(\,\cdot\,,g)$ est dans $J_H(\varpi^a\,\Xi)$, et l'on pose $c_{\alpha,\bar{x}}(g)=c_{\alpha,\bar{x}}(\Phi_H(\,\cdot\,,g))$. D'après (**), pour $g\in\varpi^a\,\Xi$ et $(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$, on a $\Phi_G(f_{i(\alpha,\bar{x})},g)=c_{\alpha,\bar{x}}(g)$; i.e., $\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(g)=c_{\alpha,\bar{x}}(g)$. D'où la proposition. □

Remarque 2.25. Il résulte de cette démonstration que l'on peut inverser l'ordre des quantificateurs dans la proposition 1.6 : *fixé* $\nu\in\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, *il existe un entier* a *tel que pour toute distribution* $T\in J_H(\varpi^a\,\Xi)$, *il existe des constantes* $c_{\alpha,\bar{x}}(T)$ ($(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$) *telles que*

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}^{(1/d)-\nu}}\cdot\Big(T^{\vee}-\sum_{(\alpha,\bar{x})}c_{\alpha,\bar{x}}(T)\Theta_{\alpha,\bar{x}}^{\vee}\Big)=0$$

où $(\alpha,\bar{x})$ *parcourt les éléments de* $\Pi_{H,n}$.

Indépendance linéaire des germes $\Gamma_{\alpha,\bar{x}}|_{A'}$ ***(***$(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$***).*** Pour $y\in A$, on note d_y la dimension (en tant que variété ϖ-adique) du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique P de G associé à y comme dans la démonstration du lemme 2.18. Notons que P n'est pas uniquement determiné par y (alors que M' et P'' le sont) ; néanmoins d_y est bien défini. Soit $t\in F^{\times}$. Pour $(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$, on note $\Gamma_{\alpha,\bar{x}}^{t}$ le germe au point 0 dans A défini par $\Gamma_{\alpha,\bar{x}}^{t}(g)=\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(tg)$.

Lemme 2.26. *Pour* $(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$, *le germe* $\Gamma_{\alpha,\bar{x}}$ *au point* 0 *dans* A *vérifie la formule d'homogénéité*

$$\Gamma_{\alpha,\bar{x}}^{t}(g)=|t|^{d_g-(d(\alpha)/2)}\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(g)\qquad(t\in F^{\times})$$

avec $d(\alpha) = \dim(\mathcal{O}_\alpha)$ $(= \dim(\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}))$.

Démonstration. Soit $f \in C_c^\infty(A)$. Comme dans [Lemaire 1997, 3.6.1], on montre que (voir la démonstration de 2.23 pour la définition de f_t)

$$\langle f_t, \Theta_{\alpha,\bar{x}} \rangle = |t|^{d(\alpha)/2} \langle f, \Theta_{\alpha,\bar{x}} \rangle \qquad (t \in F^\times,\ (\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}).$$

Et comme dans la démonstration de [Lemaire 1997, 3.6.2], on montre que

$$\Phi_H(f_t, tg) = |t|^{d_g} \Phi_H(f, g) \qquad (g \in A).$$

D'après (2.19), pour $t \in F^\times$, on a

$$[\Phi_H(f_t, .)]_0 = \sum_{(\alpha,\bar{x})} \langle f_t, \Theta_{\alpha,\bar{x}} \rangle \Gamma_{\alpha,\bar{x}},$$

d'où l'on déduit que

$$|t|^{d_g} [\Phi_H(f, g)]_0 = \sum_{(\alpha,\bar{x})} |t|^{d(\alpha)/2} \langle f, \Theta_{\alpha,\bar{x}} \rangle \Gamma^t_{\alpha,\bar{x}}(g).$$

Puisque la formule ci-dessus est vraie pour toute fonction $f \in C_c^\infty(A)$, d'après la propriété d'unicité de la proposition 2.21, on a

$$|t|^{-d_g + (d(\alpha)/2)} \Gamma^t_{\alpha,\bar{x}}(g) = \Gamma_{\alpha,\bar{x}}(g) \qquad (t \in F^\times,\ (\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}).$$

D'où le lemme. □

Soit $\Phi_H : A' \times A \to \mathbb{C}$ la fonction définie par la proposition 2.7

$$\Phi_H(y_1, y_2) = \Phi_H(\,\cdot\,, y_2)^\vee(y_1).$$

Soit $(y_1, y_2) \in A' \times A$. D'après 2.6, pour tout sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K} \subset H$, on a

$$\Phi_H(y_1, y_2) = \Phi_H(\overline{\Psi}^{\mathcal{K}}_{A,y_1}, y_2) = \int_{H_{y_2} \backslash H} \overline{\Psi}^{\mathcal{K}}_{A,y_1}(h^{-1} y_2 h)\, \frac{dh}{dh_{y_2}}.$$

Rappelons (corollaire 2.6) que la restriction de $\overline{\Psi}^{\mathcal{K}}_{A,y_1}$ à $\overline{\mathcal{O}_H(y_2)}$ coïncide avec $f|_{\overline{\mathcal{O}_H(y_2)}}$ pour une fonction $f \in C_c^\infty(A)$; par conséquent l'intégrale ci-dessus est absolument convergente (lemme 2.18). De plus, toujours d'après 2.6, la fonction Φ_H est localement constante sur $A' \times A$.

Proposition 2.27. *Soient* $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$ *et* $a = a(\nu, \{f_i\}_{i=0}^s)$ *comme dans la proposition 2.23. Alors pour tout* $(y_1, y_2) \in (\mathfrak{A}^{(1/d)-\nu} \cap A') \times \varpi^a \Xi$, *on a*

$$\Phi_H(y_1, y_2) = \sum_{(\alpha,\bar{x})} \Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(y_1) \Gamma_{\alpha,\bar{x}}(y_2)$$

où $(\alpha, \bar{x})$ *parcourt les éléments de* $\Pi_{H,n}$.

Démonstration. D'après 2.23, pour tous $y_2 \in \varpi^a\Xi$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{A}^{(1/d)-\nu})$, on a

$$\Phi_H(f^\vee, y_2) = \sum_{(\alpha,\bar{x})} \langle f, \Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}\rangle \Gamma_{\alpha,\bar{x}}(y_2)$$

où $(\alpha, \bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$. Soit $(y_1, y_2) \in (\mathfrak{A}^{(1/d)-\nu} \cap A') \times \varpi^a\Xi$. D'après 2.7, il existe un voisinage ouvert compact ω de y_1 dans $\mathfrak{A}^{(1/d)-\nu} \cap A'$ tel que pour tous $y_1' \in \omega$ et $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, on a $\phi_H(\cdot\,, y_2)^\vee(y_1') = \phi_H(\cdot\,, y_2)^\vee(y_1)$ et $\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(y_1') = \Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(y_1)$. En prenant $f = \mathrm{vol}(\omega, d_A g)^{-1}\mathbf{1}_\omega$, on obtient l'égalité cherchée. □

Lemme 2.28. *Pour* $(y_1, y_2) \in A'_{\mathrm{e}} \times A'_{\mathrm{e}}$, *on a* $\phi_H(y_1, y_2) = \Phi_H(y_2, y_1)$.

Démonstration. Soit $(y_1, y_2) \in A'_{\mathrm{e}} \times A'_{\mathrm{e}}$, et soit $\mathcal{K} \subset H$ un sous-groupe ouvert compact. On a

$$\begin{aligned}
\Phi_H(y_1, y_2) &= \int_{Z_H\backslash H} \overline{\Psi}^{\mathcal{K}}_{A,y_1}(h^{-1}y_2h)\,\frac{dh}{dz}\\
&= \int_{Z_H\backslash H}\left(\int_{\mathcal{K}} \overline{\Psi}^{\mathcal{K}}_{A,y_1}(h^{-1}ky_2k^{-1}h)\,d_{\mathcal{K}}k\right)\frac{dh}{dz}\\
&= \int_{Z_H\backslash H}\left(\int_{\mathcal{K}} \overline{\Psi}^{\mathcal{K}}_{A,y_2}(hky_1k^{-1}h^{-1})\,d_{\mathcal{K}}k\right)\frac{dh}{dz} = \Phi_H(y_2, y_1). \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemme 2.29. *Il existe un* $b = b(\{f_i\}_{i=0}^s) \in \mathbb{Z}$ *tel que pour tous* $y_1,\ y_2 \in \mathfrak{A}^b \cap A'_{\mathrm{e}}$ *et tout entier* $d \geq 0$, *on a*

$$\sum_{(\alpha,\bar{x})} \Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(y_1)\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(y_2) = \sum_{(\alpha,\bar{x})} \Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(y_2)\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(y_1)$$

où $(\alpha, \bar{x})$ *parcourt les éléments de* $\Pi_{H,n}$ *tels que* $d(\alpha) = d$.

Démonstration. Soit $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$. D'après 1.5 et 2.7, pour $g \in A'$ et $t \in F^\times$, on a

$$\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(tg) = c\int_{\overline{\mathcal{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}}} \overline{\Psi}^{K_H}_{A,g}(tu)\,du = |t|^{-\dim(\mathfrak{u}_\alpha)}\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(g).$$

avec $c = c(dh_{n_\alpha}, du)$. Posons $m = nd$, et soit $\beta \in \Pi_m$ la partition définie par

$$\beta = (\alpha_1 = \cdots = \alpha_1 \geq \alpha_2 = \cdots = \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n = \cdots = \alpha_n)$$

où chaque α_i apparaît d fois. D'après [Lemaire 2004, 5.3/1 et 5.3/3], on a $d(\alpha) = 2\sum_{i=1}^m i(1-\beta_i)$. Par ailleurs, on a (voire [Lemaire 2004, section 5])

$$2\dim(\mathfrak{u}_\alpha) = m^2 - \dim(\mathfrak{m}_\alpha) = m^2 - \sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i^2$$

où $(\hat{\beta}_1 \geq \cdots \geq \hat{\beta}_m) \in \Pi_m$ désigne la partition duale de β, définie par

$$\hat{\beta}_i = \#\{k : \beta_i \geq k\}.$$

Un calcul facile montre que $m^2 - \sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i^2 = 2\sum_{i=1}^m i(1-\beta_i)$. On a donc $\dim \mathfrak{u}_\alpha = \frac{1}{2}d(\alpha)$, d'où la formule d'homogénéité

$$\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(tg) = |t|^{-\frac{d(\alpha)}{2}}\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(g) \qquad (g \in A',\ t \in F^\times). \tag{2.30}$$

Soient $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$ et $a = a(\nu, \{f_i\}_{i=0}^s)$ comme dans la proposition 2.23. Choisissons un $b \in \mathbb{Z}$ tel que $b \geq \frac{1}{d} - \nu$ et $\mathfrak{A}^b \subset \varpi^a\,\Xi$. D'après 2.27 et 2.28, pour tous $y_1,\ y_2 \in \mathfrak{A}^b \cap A'_{\mathrm{e}}$, on a

$$\sum_{(\alpha,\bar{x})} \Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(y_1)\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(y_2) = \sum_{(\alpha,\bar{x})} \Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(y_2)\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(y_1)$$

où $(\alpha, \bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$. Puisque pour $y \in A'_{\mathrm{e}}$, on a $d_y = 0$, l'égalité ci-dessus jointe aux formules d'homogénéité 2.26 et (2.30), impliquent le lemme (fixer $y_1,\ y_2$ comme ci-dessus, puis remplacer y_2 par ty_2 pour $t \in \mathfrak{o}_F \smallsetminus \{0\}$). □

Pour $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, on note $\Gamma'_{\alpha,\bar{x}}$ et $\Gamma'_{\mathrm{e};\alpha,\bar{x}}$ les germes de fonctions au point 0 respectivement dans A' et dans A'_{e} [Lemaire 2004, 3.5] définis par $\Gamma'_{\alpha,\bar{x}} = \Gamma_{\alpha,\bar{x}}|_{A'}$ et $\Gamma'_{\mathrm{e};\alpha,\bar{x}} = \Gamma_{\alpha,\bar{x}}|_{A'_{\mathrm{e}}}$; et l'on pose $\Gamma'_{\mathrm{e},i(\alpha,\bar{x})} = \Gamma'_{\mathrm{e};\alpha,\bar{x}}$.

Lemme 2.31. *Il existe une constante $c_0 \neq 0$ telle que $\Gamma'_{\mathrm{e},0} = c_0$.*

Démonstration. Soit $b = b(\{f_i\}_{i=0}^s)$ comme dans le lemme 2.29. Puisque $\Theta^\vee_{(1,\dots,1),1}$ est une mesure de Haar sur A, en prenant $d = 0$ dans 2.29, on obtient

$$\Gamma_{(1,\dots,1),1}(y_1) = \Gamma_{(1,\dots,1),1}(y_2) \qquad (y_1,\ y_2 \in \mathfrak{A}^b \cap A'_{\mathrm{e}});$$

i.e., $\Gamma'_{\mathrm{e},0} = c$ pour une constante $c \in \mathbb{C}$. Il s'agit de montrer que cette constante est non nulle. D'après la remarque 2.22, dont on reprend ici les notations, on a $\Gamma_{(1,\dots,1),1} = \Gamma_{(1,\dots,1)}$. On peut donc supposer que $H = G$. Si $D = F$ (i.e., si $G \simeq \mathrm{GL}_n(F)$), la non-nullité de c est démontrée par Henniart dans l'appendice 3 de [Henniart 1984] (les germes associés aux G-orbites unipotentes de G sont donnés par $\Gamma_\alpha(\cdot - 1)$ pour $\alpha \in \Pi_n$). Sa démonstration reste valable pour $D \neq F$. □

Proposition 2.32. *Les germes $\Gamma'_{\alpha,\bar{x}}$ $((\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n})$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants.*

Démonstration. Si $[\phi]_0$ est un germe de fonctions en 0, on pose $[\phi]'_0 = [\phi]_0|_{A'}$ et $[\phi]'_{0,\mathrm{e}} = [\phi]_0|_{A'_{\mathrm{e}}}$. Soit $\{a_{\alpha,\bar{x}} : (\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}\} \subset \mathbb{C}$ une famille telle que

$$\sum_{(\alpha,\bar{x})} a_{\alpha,\bar{x}}\Gamma'_{\alpha,\bar{x}} = 0$$

où $(\alpha,\bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$. Posons $a_{i(\alpha,\bar{x})}=a_{\alpha,\bar{x}}$ ($(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$), et notons $f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(A)$ la fonction définie par $f=\sum_{i=0}^s a_i f_i$. D'après 2.21, on a $[\Phi_H(f,\cdot)]'_0$.

Posons $Q(g)=\sum_{i=1}^s a_i\Phi_H(f_i,g)$ ($g\in A$). D'après le lemme 2.26, pour $t\in\mathfrak{o}_F\smallsetminus\{0\}$, on a

$$[Q(t\,\cdot)]'_{0,\mathrm{e}}=\sum_{i=1}^s a_i|t|^{-d(i)/2}[\Phi_H(f_i,\cdot)]'_{0,\mathrm{e}}$$

avec $d(i(\alpha,\bar{x}))=d(\alpha)$ ($(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$). On en déduit que si le germe $[Q]'_{0,\mathrm{e}}$ n'est pas nul, alors il existe un $\gamma\in A'_{\mathrm{e}}$ tel que $\lim_{t\to 0,\,t\neq 0}|Q(t\gamma)|=+\infty$; ce qui est impossible puisque, par la proposition 2.21,

$$0=[\Phi_H(f,\cdot)]'_{0,\mathrm{e}}=a_0[\Phi_H(f_0,\cdot)]'_{0,\mathrm{e}}+[Q]'_{0,\mathrm{e}}$$

et que le germe $[\Phi_H(f_0,\cdot)]'_{0,\mathrm{e}}$ est constant (lemme 2.31). Par conséquent $[Q]'_{0,\mathrm{e}}=0$ et $a_0[\Phi_H(f_0,\cdot)]'_{0,\mathrm{e}}=0$; d'où a_0 $(=\Phi_H(f,0))=0$ (encore 2.31).

Fixons un $i\in\{1,\dots,s\}$ et montrons que $a_i=0$. Soit $(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$ l'élément tel que $i(\alpha,\bar{x})=i$. D'après (2.19), il existe une (unique) constante $c_i>0$ telle que pour toute fonction $f'\in C^\infty_{\mathrm{c}}(A)$, on a la formule de descente

$$\Phi_H(f',n_{\alpha,x})=c_i f'_{H,\mathfrak{p}_\alpha}(0).$$

Par ailleurs, d'après (2.10), on a $[\Phi_{M_{H,\alpha}}(f_{H,\mathfrak{p}_\alpha},\cdot)]_0|_{\mathfrak{m}_\alpha\cap A'}=0$. Comme tout voisinage de 0 dans $\mathfrak{m}_\alpha$ rencontre $\mathfrak{m}'_{\alpha,\mathrm{e}}$, en remplaçant H par $M_{H,\alpha}$ et f par $f_{H,\mathfrak{p}_\alpha}$ dans le raisonnement précédent, on obtient que $f_{H,\mathfrak{p}_\alpha}(0)=0$. Donc a_i $(=\Phi_H(f,n_{\alpha,x}))=0$. Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Proposition 2.33. *Soit $T\in J^*_H(A)$. Alors la transformée de Fourier $T^\vee$ est intégrable au voisinage de* 0 *dans A.*

Démonstration. Soit $\nu\in\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, et soit un entier a tel que :

– pour tout $g\in\varpi^a\,\Xi$, on a

$$j^\nu\Big(\Phi_H(\cdot\,,g)-\sum_{(\alpha,\bar{x})}\Gamma_{\alpha,\bar{x}}(g)\Theta_{\alpha,\bar{x}}\Big)=0$$

où $(\alpha,\bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$;

– pour toute distribution $T\in J_H(\varpi^a\,\Xi)$, il existe des constantes $c_{\alpha,\bar{x}}(T)$ ($(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$) telles que

$$j^\nu\Big(T-\sum_{(\alpha,\bar{x})}c_{\alpha,\bar{x}}(T)\Theta_{\alpha,\bar{x}}\Big)=0$$

où $(\alpha,\bar{x})$ parcourt les éléments de $\Pi_{H,n}$.

D'après 2.23 et 2.25, un tel a existe. Posons $\mathscr{C} = C_c(A/\mathfrak{A}^\nu)$ et soit $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions f telles que $\Phi_G(f, \gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \varpi^a \Xi \cap A'$. Si $f \in \mathscr{C}_0$, alors (proposition 2.32) $\langle f, \Theta_{\alpha,\bar{x}}\rangle = 0$ pour tout $(\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, donc $\langle f, T\rangle = 0$ pour tout $T \in J_H(\varpi^a \Xi)$. Par conséquent, la forme bilinéaire $\mathscr{C} \times J_H(\varpi^a \Xi) \to \mathbb{C}$, $(f, T) \mapsto \langle f, T\rangle$ induit une forme bilinéaire non dégénérée $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0 \times j^\nu(J_H(\varpi^a \Xi)) \to \mathbb{C}$. Puisque $\dim_{\mathbb{C}}(j^\nu(J_H(\varpi^a \Xi))) < +\infty$, on en déduit qu'il existe un ensemble fini $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \subset \varpi^a \Xi \cap A'$ tel que $j^\nu(J_H(\varpi^a \Xi)) = \langle j^\nu(\Phi_H(\cdot, \gamma_i)) : i = 1, \ldots, r\rangle$. Posons $\mu = \frac{1}{d} - \nu$. Par dualité, on obtient que pour toute distribution $T \in J_H(\varpi^a \Xi)$, la restriction $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}^\mu} \cdot T^\vee$ est combinaison linéaire des restrictions $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}^\mu} \cdot \Phi_H(\cdot, \gamma_i)^\vee$ pour $i = 1, \ldots, r$. On conclut grâce au corollaire 2.17 et au lemme 2.13. □

Corollaire 2.34. *Pour $y \in A$, la transformée de Fourier $\Phi_H(\cdot, y)^\vee$ est intégrable au voisinage de* 0 *dans A.*

Démonstration. Pour $y \in A$, $\overline{\mathcal{O}_H(y)}$ est compact modulo H-conjugaison : en effet, il existe un $b \in \mathbb{Z}$ tel que $y \in \varpi^b \Xi$ où Ξ est la partie G-invariante ouverte et fermée dans A définie en [Lemaire 2004, 1.2]. Puisque $\varpi^b \Xi \subset {}^G(\mathfrak{A}^{b-1})$ (*ibidem*), $\varpi^b \Xi$ est compact modulo G-conjugaison, donc est compact modulo H-conjugaison. □

3. Intégrabilité locale des caractères de H

Descente des distributions H-invariantes au voisinage d'un élément pur. On reprend en la modifiant la construction de [Lemaire 2004, 2] ($E = F$, $\sigma = 1$). Soit $x \in H$ un élément G-*pur*. Le centralisateur $B = \{g \in A : gx - xg = 0\}$ de x dans A, est une F-algèbre simple. Soient F' et $G_x = B^\times \subset G$ respectivement le centre et le groupe multiplicatif de B (notons, pour éviter les confusions, que dans [Lemaire 2004] le groupe G_x est noté H). On pose $H_x = G_x \cap H$. Fixons un caractère additif $\Psi_{F'}$ de F' de conducteur $\mathfrak{p}_{F'}$ et posons $\Psi_B = \Psi_{F'} \circ \mathrm{tr}'_{B/F'}$ où $\mathrm{tr}'_{B/F'} : B \to F'$ désigne la trace réduite. Soit $s : A \to B$ l'homomorphisme surjectif de (B, B)-bimodules défini par $\Psi_B(s(y)b) = \Psi_A(yb)$ pour tout $(y, b) \in A \times B$. Soit $\varrho \in G$ tel que $s(\varrho) = 1$, et soit W un sous-F-espace vectoriel de A tel que $A = W \oplus B$. Soit C l'image de l'application F-linéaire $A \to A$, $y \mapsto xyx^{-1} - y$. Pour $u \in B$, on note $\Phi_u : W \times B \to A$ l'application F-linéaire définie par

$$\Phi_u(v, b) = (1 + u\varrho)xv - v(1 + u\varrho)x + b\varrho x.$$

Puisque $A = C \oplus B\varrho$, l'application Φ_0 est bijective. Soit $\mathfrak{U}$ le voisinage ouvert de 0 dans B formé des $u \in B$ vérifiant les conditions

$$(1 + u\varrho) \in H \quad \text{et} \quad \det_F(\Phi_u \circ \Phi_0^{-1}; A) \neq 0.$$

Pour $b \in H_x$, on pose $\mathfrak{U}_b = b^{-1}\mathfrak{U}b$. D'après [Lemaire 2004, 2.3], pour $b \in H_x$, l'application $\zeta_b : H \times \mathfrak{U}_b \to H,\ (h, u) \mapsto h^{-1}(1 + ub^{-1}\varrho b)xh$ est partout submersive. Soit $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{U}$ un voisinage ouvert compact de 0 dans B, et soit $\Xi_\natural$ la partie G_x-invariante ouverte et fermée dans B définie comme en [Lemaire 2004, 1.2] (en remplaçant A par B et F par F'). Soit ϖ' une uniformisante de F'. Puisque H_x est ouvert et distingué dans G_x, $\langle\varpi'\rangle H_x$ est un sous-groupe d'indice fini de G_x. Par conséquent, $\Xi_\natural$ est compact modulo H_x-conjugaison.

Soit $J_H(H) \subset \mathfrak{D}(H)$ l'espace des distributions H-invariantes sur H (pour l'action de H par conjugaison). Soit $d_B u$ la mesure de Haar sur B normalisée par un (i.e., par tout) $\mathfrak{o}_{F'}$-ordre maximal dans B. Pour $T \in J_H(H)$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varpi'^k\Xi_\natural \subset {}^{H_x}\mathfrak{O}$, on note $T_{\natural,k}$ la distribution sur B à support dans $\varpi'^k\Xi_\natural$ définie grâce à la famille de submersion $\{\zeta_b\}_{b\in H_x}$ (et via le choix des mesures de Haar dh et $d_B u$ respectivement sur H et B) comme en [Lemaire 2004, 2].

Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de H. Si $\rho \in \epsilon(\mathcal{K})$, on note χ_ρ le caractère $k \mapsto \operatorname{trace} \rho(k)$, $\deg(\rho)$ le degré de ρ, et l'on pose

$$\xi_\rho = \frac{\deg(\rho)}{\operatorname{vol}(\mathcal{K}, dh)}\chi_\rho.$$

Proposition 3.1 [Lemaire 2004, 2.7]. *Soient $T \in J_H(H)$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varpi'^k\Xi_\natural \subset {}^{H_x}\mathfrak{O}$.*

(1) *La distribution $T_{\natural,k} \in \mathfrak{D}(B)$ est H_x-invariante.*

(2) *Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de H. Pour $f \in C_c^\infty(\varpi'^k\Xi_\natural \cap \mathfrak{O})$, on a*

$$\langle f, T_{\natural,k}\rangle = \sum_{\rho\in\epsilon(\mathcal{K})} \int_{\mathfrak{O}} f(u)\, T * \xi_\rho((1 + u\varrho)x)\, d_B u.$$

Corollaire 3.2 [Lemaire 2004, 2.8]. *Soient $\mathfrak{B}$ un sous-groupe ouvert compact de B tel que $\mathfrak{B} \subset \varpi'^k\Xi_\natural \cap \mathfrak{O}$ et $(1 + \mathfrak{B}\varrho) \subset \mathcal{K}$, et $\chi \in \epsilon(\mathfrak{B})$ un caractère tel que $\langle\chi, T_{\natural,k}\rangle \neq 0$. Alors il existe une représentation $\rho \in \epsilon(\mathcal{K})$ telle que*

$$T * \xi_\rho|_{\mathcal{K}x} \neq 0 \quad \textit{et} \quad \int_{\mathfrak{B}} \chi(u)\rho(1 + u\varrho)\, d_B u \neq 0.$$

Étude locale des caractères de H. Pour $\nu \in (\frac{1}{d}\mathbb{Z})_{>0}$, notons $e_\nu : \mathfrak{A}^\nu \to K^\nu$ la bijection $y \mapsto 1 + y$. Pour $\nu, \mu \in (\frac{1}{d}\mathbb{Z})_{>0}$ tels que $\mu \geq 2\nu$, le groupe $K^{\mu-\nu}/K^\mu$ est central dans K^ν/K^μ, et l'application $e_{\mu-\nu}$ induit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes $\mathfrak{A}^{\mu-\nu}/\mathfrak{A}^\mu \to K^{\mu-\nu}/K^\mu$. Pour $g \in A$, on note Ψ_g le caractère de A donné par $\Psi_g(y) = \Psi_A(gy)$. L'application $g \mapsto \Psi_g$ identifie A a son dual de Pontryagin $\epsilon(A)$, et pour $\nu, \mu \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $\mu \geq 2\nu$, elle induit une identification $\mathfrak{A}^{(1/d)-\mu}/\mathfrak{A}^{(1/d)+\nu-\mu} = \epsilon(\mathfrak{A}^{\mu-\nu}/\mathfrak{A}^\mu)$; d'où une identification

$$\mathfrak{A}^{(1/d)-\mu}/\mathfrak{A}^{(1/d)+\nu-\mu} = \epsilon(K^{\mu-\nu}/K^\mu).$$

Si $\rho \in \epsilon(K^a)$ pour un entier $a > 0$, on note $n(\rho)$ le plus petit entier $b \geq a$ tel que $\rho|_{K^b} = 1$. Pour $a,\ b \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $b \geq a$, on note $\epsilon_b(K^a) \subset \epsilon(K^a)$ le sous-ensemble formé des représentations ρ telles que $n(\rho) = b$. Pour $a > 0$ et $\rho \in \epsilon(K^a)$ tels que $b = n(\rho) \geq 2a$, le caractère $\omega_\rho \in \epsilon(K^{b-a}/K^b)$ donné par $\rho|_{K^{b-a}} = \omega_\rho \cdot \mathrm{Id}_{K^{b-a}}$ définit comme en [Lemaire 2004] 3 un élément $Z_\rho \in \mathfrak{A}^{(1/d)-b}/\mathfrak{A}^{(1/d)+a-b}$. Mutatis mutandis, les lemmes 3.1 et 3.2 de [Lemaire 2004] sont vrais ici.

Pour $T \in \mathfrak{D}(H)$ et $f \in C_c^\infty(H)$, on note $T * f$ la fonction sur H définie par $T * f(y) = \int_H (yh^{-1})\, dTh$.

Remarque 3.3 (avec les notations de [Lemaire 2004]). La proposition 3.4 de [Lemaire 2004] est vraie pour toute distribution $T \in J_\sigma(G_E)$, et pas seulement pour le caractère tordu $\Theta_{\pi,\sigma}$ d'une représentation $\pi \in \tilde{\epsilon}_\sigma(G_E)$.

Proposition 3.4 [Lemaire 2004, 3.4]. *Il existe un entier $d_0 = d_0(x, \mathfrak{A}) \leq 0$ tel que pour tous $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $K^a \subset H$, $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2a}$, $T \in J_H(H)$ et $\rho \in \epsilon_b(K^a)$ tels que $T * \xi_\rho|_{K^a x} \neq 0$, on a l'inclusion $Z_\rho \subset B + \mathfrak{A}^{a-b+d_0}$.*

Si π est une représentation complexe lisse irréductible de H, le groupe $Z \cap H$ opère sur l'espace de π via un caractère (lisse), et toute extension de ce caractère en un caractère lisse de Z permet d'étendre π en une représentation lisse (irréductible) de ZH. Puisque ZH est d'indice fini dans G et que toute représentation complexe lisse irréductible de G est admissible, on en déduit (voir [Henniart 2001, 2.2]) que toute représentation complexe lisse irréductible de H est admissible. Pour toute représentation complexe lisse admissible π de H, on note $\Theta_\pi \in J_H(H)$ la distribution trace$(\pi\, dh)$; cette distribution ne dépend pas vraiment de π mais seulement de sa classe d'équivalence.

Proposition 3.5 [Lemaire 2004, 3.3]. *Soient $a,\ b \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $b \geq 2a$ et $K^a \subset H$. Soient $\pi \in \epsilon(H)$ et $\rho \in \epsilon_b(K^a)$ tels que $\pi^{K^a} \neq 0$ et $\Theta_\pi * \xi_\rho \neq 0$. Alors on a $Z_\rho \cap \mathfrak{N} \neq \varnothing$.*

Démonstration. Elle est identique à celle de [Lemaire 2004, 3.3]. Un mot sur la décomposition de Cartan de g_i qu'on y a utilisée : soit W un sous-espace non nul de l'espace de π tel que $\pi(K^a)(W) = W$ et $\pi|_{K^a}$ induise sur W une représentation équivalente à ρ, et soit $w \in W \smallsetminus \{0\}$. Alors il existe un $h \in H$ tel que $\pi(\mathbf{1}_{K^{a,h}})(w) \neq 0$ avec $K^{ah} = h^{-1}K^a h$. En écrivant une décomposition de Cartan de h *dans* G, on obtient que $\omega_\rho|_{(K^{b-a} \cap P_0')K^b} = 1$ pour un sous-groupe parabolique minimal P_0' de G. $\square$

Étude locale des réductions à B des caractères de H. Soit W un B-module simple (à gauche). Alors $\Delta^o = \mathrm{End}_B(W)$ est une algèbre à division de centre F', et $B = \mathrm{End}_\Delta(W)$ où Δ désigne l'algèbre opposée à Δ^o. Soit $\delta' = e(F'/F)(\Delta : F')^{1/2}$ où $e'(F'/F)$ désigne l'indice de ramification de l'extension F'/F. Fixons un $\mathfrak{o}_\Delta$-réseau $\Lambda_\natural$ dans W et posons $\mathfrak{A}_\natural^\nu = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_\Delta}(\Lambda_\natural, \Lambda_\natural \cdot \mathfrak{p}_\Delta^{\delta'\nu})$ ($\nu \in \frac{1}{\delta'}\mathbb{Z}$). On note $f \mapsto f^\vee$

(resp. $T \mapsto T^\vee$) la transformée de Fourier sur $C_c^\infty(B)$ (resp. sur $\mathfrak{D}(B)$) définie par $f^\vee(v) = \int_B f(u)\overline{\Psi_B(vu)}\, d_B(u)$ (resp. $\langle f, T^\vee\rangle = \langle f^\vee, T\rangle$).

Soit a_0 le plus petit entier i tel que $\mathfrak{A}_\natural^i \varrho \subset \mathfrak{A}$. On a $\mathfrak{A}_\natural^{a+a_0}\varrho \subset \mathfrak{A}^a$ ($a \in \mathbb{Z}$). Fixons un entier k_0 tel que $\varpi'^{k_0}\,\Xi_\natural \subset {}^{H_x}\mathfrak{O}$, et pour $\pi \in \epsilon(H)$, notons θ_π la distribution H_x-invariante sur B définie par $\theta_\pi = (\Theta_\pi)_{\natural,k_0}$ (voir proposition 3.1). On note $\mathfrak{N}_\natural$ l'ensemble $\mathfrak{N}\cap B$ des éléments nilpotents de B. Soit q le cardinal du corps résiduel de D, et soit $d_{\mathfrak{A}}$ la distance sur A définie par $d_{\mathfrak{A}}(y, z) = q^{-d\omega_{\mathfrak{A}}(z-y)}$ ($y, z \in A$) ; voir [Lemaire 2004, 1] pour la définition de la valuation $\omega_{\mathfrak{A}} : A \to \frac{1}{d}\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$. On pose $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}\cap(\mathfrak{A}\smallsetminus\mathfrak{A}^1)$.

Lemme 3.6. *Pour tout voisinage ouvert compact $\mathcal{V}^*$ de $\mathfrak{N}^*\cap B$ dans $(\mathfrak{A}\smallsetminus\mathfrak{A}^1)\cap B$, il existe un entier $\nu = \nu(s, \mathcal{V}^*)$ tel que pour tout $g \in \mathfrak{N}^*$, on a l'implication $d_{\mathfrak{A}}(g, B) \leq q^{-\nu} \Rightarrow s(\varrho g) \in \mathcal{V}^*$.*

Proposition 3.7 [Lemaire 2004, 4.2]. *Soit $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert et fermé de $\mathfrak{N}_\natural \smallsetminus \{0\}$ dans $B\smallsetminus\{0\}$ tel que $F^\times\mathcal{V} = \mathcal{V}$, et soit $\pi \in \epsilon(H)$. Il existe un entier $a > 0$ tel que pour tout $\chi \in \epsilon(\mathfrak{A}_\natural^{a+a_0})$ tel que $\langle\overline{\chi}, \theta_\pi\rangle \neq 0$, on a l'inclusion* $\mathrm{Supp}(\chi^\vee) \subset \mathcal{V}\cup\mathfrak{A}_\natural^\mu$ *avec $\mu = \delta'^{-1} - 2a - a_0 + 1$.*

Démonstration. Posons $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}\cap(\mathfrak{A}\smallsetminus\mathfrak{A}^1)$. Soient $d_0 = d_0(x, \mathfrak{A}) \leq 0$ et $\nu = \nu(s, \mathcal{V}^*)$ des entiers comme dans la proposition 3.4 et le lemme 3.6. Soit un entier $a > 0$ tel que :

(a) $\mathfrak{A}_\natural^{a+a_0} \subset \omega'^{k_0}\,\Xi_\natural \cap \mathfrak{O}$,

(b) $a \geq \frac{1}{d}\nu - d_0 + [\frac{1}{d}]$ où [ ] désigne la partie entière,

(c) $\mathcal{V}^* + \mathfrak{A}_\natural^{\delta'^{-1}+a-a_0} = \mathcal{V}^*$,

(d) $K^a \subset H$ et $\pi^{K^a} \neq 0$.

D'après la démonstration de [Lemaire 2004, 4.2], cet entier a convient. □

Soit $dh_\natural$ une mesure de Haar sur H_x. Fixons un système de représentants $\mathcal{N}_{H,\natural}$ dans $\mathfrak{N}_\natural$ des H_x-orbites nilpotentes de B (cf. la section 1 ; on rappelle que H_x est un sous-groupe ouvert distingué de $G_x = B^\times$). Pour chaque $n \in \mathcal{N}_{H,\natural}$, choisissons une mesure de Haar $dh_{\natural,n}$ sur le centralisateur $(H_x)_n$ de n dans H_x, et notons $\Theta_{\natural,n}$ la distribution sur B définie par la proposition 1.5 :

$$\langle f, \Theta_{\natural,n}\rangle = \int_{(H_x)_n\backslash H_x} f(h_\natural^{-1} n h_\natural)\,\frac{dh_\natural}{dh_{\natural,n}}.$$

D'après le corollaire 2.34 et la proposition 2.7, pour $n \in \mathcal{N}_{H,\natural}$, la transformée de Fourier $\Theta_{\natural,n}^\vee$ est une distribution intégrable au voisinage de 0 dans B, localement constante sur l'ensemble B' des éléments semisimples réguliers de B.

Proposition 3.8 [Lemaire 2004, 4.3]. *Soit $\pi \in \epsilon(H)$. La distribution θ_π est intégrable au voisinage de 0 dans B. Plus précisément, il existe un entier m et des constantes $c_n(\pi)$ $(n \in \mathcal{N}_{H,\natural})$ tels que*

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}_\natural^m} \cdot \Big(\theta_\pi - \sum_{n \in \mathcal{N}_{H,\natural}} c_n(\pi) \Theta_{\natural,n}^\vee\Big) = 0.$$

Corollaire 3.9 [Lemaire 2004, 4.4]. *La distribution Θ_π est intégrable au voisinage de x dans H. Plus précisément, il existe un entier $m > a_0$ tel que $K^{m-a_0} \subset H$ et*

$$\Theta_\pi((1+u\varrho)x) = \sum_{n \in \mathcal{N}_{H,\natural}} c_n(\pi) \Theta_{\natural,n}^\vee(u)$$

pour presque tout $u \in \mathfrak{A}_\natural^m$ (resp. pour tout $u \in \mathfrak{A}_\natural^m \cap B'$).

Réduction aux éléments G-purs de H (descente parabolique). Soit $g \in A$, et posons $\Delta_g = \det'(G_g)$. Le groupe HG_g est distingué dans G, et l'application $\det'$ induit par passages aux quotients un isomorphisme de groupes $\delta_g : HG_g \backslash G \to \Delta_H \Delta_g \backslash F^\times$. Puisque $HG_g \supset {}_\varpi H$, le groupe $HG_g \backslash G$ est fini. La G-orbite $\mathbb{O}_g = \mathbb{O}_G(g)$ est un H-ensemble (pour l'opération de H par conjugaison), et via δ_g, l'ensemble des H-orbites de $\mathbb{O}_g$ est un torseur sous $\Delta_H \Delta_g \backslash F^\times$. Pour $\bar{y} \in \Delta_H \Delta_g \backslash F^\times$, choisissons un représentant y de $\delta_g^{-1}(\bar{y})$ dans G, et posons $\mathbb{O}_{g,\bar{x}} = \{h^{-1}y^{-1}gyh : h \in H\}$. On a $\mathbb{O}_g = \coprod_{\bar{y}} \mathbb{O}_{g,\bar{y}}$ où $\bar{y}$ parcourt les éléments de $\Delta_H \Delta_g \backslash F^\times$, et chaque H-orbite $\mathbb{O}_{g,\bar{y}}$ est ouverte et fermée dans $\mathbb{O}_g$.

D'après [Lemaire 2004, 5.2/2] et le paragraphe ci-dessus, $\overline{\mathbb{O}_H(g)}$ est union de $\mathbb{O}_H(g)$ et d'un nombre fini de H-orbites de dimension (en tant que variétés ϖ-adiques) strictement inférieure à celle de $\mathbb{O}_H(g)$. Soit $g_* \in \overline{\mathbb{O}_G(g)}$, et soit $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans G telle que $\lim_{n \to +\infty} g_n^{-1} g g_n = g_*$. Puisque le groupe $HG_g \backslash G$ est fini, quitte à remplacer la suite $\{g_n\}$ par l'une de ses sous-suites, on peut supposer que $g_n \in (HG_g)y$ $(n \in \mathbb{N})$ pour un $y \in G$ indépendant de n. Quitte à remplacer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, g_n par $g_n' \in G_g g_n$, on peut supposer que $g_n \in Hy$ $(n \in \mathbb{N})$. Puisque $\lim_{n \to +\infty} g_n^{-1} g g_n = g_*$, on a $\lim_{n \to +\infty} y g_n^{-1} g g_n y^{-1} = y g_* y^{-1} \in \overline{\mathbb{O}_H(g)}$. Par conséquent, pour chaque G-orbite $\mathbb{O}$ contenue dans $\overline{\mathbb{O}_G(g)}$, l'intersection $\mathbb{O} \cap \overline{\mathbb{O}_H(g)}$ est non vide. On en déduit que la H-orbite $\mathbb{O}_H(g)$ est fermée dans A si et seulement si la G-orbite $\mathbb{O}_G(g)$ est fermée dans A ; i.e., si et seulement si g est G-fermé. (On peut montrer que $\overline{\mathbb{O}_H(g)}$ contient une unique H-orbite fermée dans A, celle dont la dimension est minimale ; mais nous n'en aurons pas besoin ici.) Puisque les distributions Θ_π $(\pi \in \epsilon(H))$ sont H-invariantes sur H, il suffit de montrer qu'elles sont intégrables au voisinage des éléments G-fermés de H.

Soit $x \in H$ un élément G-fermé. Soient $Q_1(t), \ldots, Q_r(t)$ les composantes irréductibles du polynôme minimal réduit de x. Pour $i = 1, \ldots, r$, on pose $V_i =$

$\ker\{Q_i(x) : V \to V\}$; c'est un sous-D-espace vectoriel de V. On a la décomposition $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$. Soit $\mathfrak{m}$ la sous-F-algèbre de Lévi de A définie par $\mathfrak{m} = \{g \in A : g(V_i) \subset V_i,\ i = 1, \dots, r\}$. On a une identification canonique $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i=1}^r A_i$ avec $A_i = \mathrm{End}_D(V_i)$. Soit $B = \{g \in A : xg - gx = 0\}$. On a l'inclusion $B \subset \mathfrak{m}$, laquelle entraîne la décomposition $B = \bigoplus_{i=1}^r B_i$, $B_i = B \cap A_i$. Chaque B_i est une F-algèbre simple, et son centre F_i est une extension finie de F isomorphe à $F[t]/Q_i(t)$. Écrivons $x = \bigoplus_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in B_i$; on a $F_i = F[x_i]$.

Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Fixons un caractère additif Ψ_{F_i} de conducteur $\mathfrak{p}_{F_i}$ et posons $\Psi_{B_i} = \Psi_{F_i} \circ \mathrm{tr}'_{B_i/F_i}$. Posons $\Psi_{A_i} = \Psi_F \circ \mathrm{tr}'_{A_i/F}$, et soit $s_i : A_i \to B_i$ l'homomorphisme surjectif de (B_i, B_i)-bimodules défini par $\Psi_{B_i}(s_i(y)b) = \Psi_{A_i}(yb)$ pour tout $(y, b) \in A_i \times B_i$. L'application $\tilde{s} = s_1 \times \cdots \times s_r : \mathfrak{m} \to B$ est un homomorphisme surjectif de (B, B)-bimodules, de noyau $\mathrm{ad}\, x(\mathfrak{m})$. Pour $i = 1, \dots, r$, choisissons un élément $\varrho_i \in A_i^\times$ tel que $s_i(\varrho_i) = 1$, et posons $\varrho = \bigoplus_{i=1}^r \varrho_i \in \mathfrak{m}^\times$. Comme en [Lemaire 2004, 7], on montre que pour tout voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ de 0 dans B suffisamment petit, on a l'inclusion $(1 + \mathfrak{U}\varrho) \subset H$ et l'application $\zeta : H \times \mathfrak{U} \to H$, $(g, u) \mapsto g^{-1}(1 + u\varrho)xg$ est partout submersive. La suite est une simple adaptation de la construction précédente (*ibidem*). Notons qu'en général, le groupe H_x n'est pas de la forme $\prod_{i=1}^r H_i$ pour des sous-groupes ouverts distingués $H_i \subset B_i^\times$ (en revanche, il existe toujours un tel sous-groupe $\prod_{i=1}^r H_i \subset B^\times$ tel que $\prod_{i=1}^r H_i \subset H_x$) ; mais ceci ne change rien à la construction. En définitive, on obtient :

Thórème 3.10 [Lemaire 2004, 7.1]. *Soit $\pi \in \epsilon(H)$. La distribution Θ_π est localement intégrable sur H (avec décomposition au voisinage des éléments G-fermés de H comme en 3.9), localement constante sur H_{r}.*

Une version du théorème 3.10 pour les distributions H-invariantes sur A. Il s'agit d'adapter la démonstration du théorème 3.10, de manière à pouvoir achever la démonstration de la proposition 2.1.

Soit $x \in A$ un élément *pur* ; notons que l'on peut avoir $x = 0$. Reprenons la construction (et les notations) du début de la section 3, en les modifiant de la manière suivante. Pour $u \in B$, on note $\Phi_u : W \times B \to A$ l'application F-linéaire définie par

$$\Phi_u(v, b) = (x + u\varrho)v - v(x + u\varrho) + b\varrho.$$

Puisque $A = \mathrm{ad}\, x(A) \oplus B\varrho$, l'application Φ_0 est bijective. Soit $\mathfrak{U}$ le voisinage ouvert de 0 dans B formé des $u \in B$ tels que $\det_F(\Phi_u \circ \Phi_0^{-1}; A) \neq 0$. On pose $\mathfrak{U}_b = b^{-1}\mathfrak{U}b$ ($b \in H_x$). Pour $b \in H_x$, l'application $\zeta_b : H \times \mathfrak{U}_b \to A$, $(h, u) \mapsto h^{-1}(x + ub^{-1}\varrho b)h$ est partout submersive (calcul facile ; cf. [Lemaire 2004, 2.2 et 2.3]). Soit $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{U}$ un voisinage ouvert compact de 0 dans B. Pour $T \in J_H(A)$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varpi'^k \Xi_\natural \subset {}^{H_x}\mathfrak{O}$, la famille de submersion $\{\zeta_b\}_{b \in H_x}$ permet de définir, comme en [Lemaire 2004, 2], une distribution $T_{\natural,k}$ sur B à support dans $\varpi'^k \Xi_\natural$.

Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de $(A,+)$. La formule de Plancherel pour $\mathcal{K}$ implique que

$$\mathrm{vol}(\mathcal{K}, d_A g)T = \sum_{\chi\in\epsilon(\mathcal{K})} (T*\chi)\, d_A g \qquad (T\in\mathfrak{D}(A))$$

avec $T*\chi(y)=\int_A \chi(y-g)\,dT'(g)$ $(y\in A)$. Et la proposition 3.1 reste vraie, mutatis mutandis. On en déduit la version suivante du corollaire 3.2 :

Proposition 3.11. *Soient $T\in J_H(A)$ et $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\varpi'^k\,\Xi_\natural\subset {}^{H_x}\mathfrak{O}$. Soient $\mathfrak{B}$ un sous-groupe ouvert compact de B tel que $\mathfrak{B}\subset\varpi'^k\,\Xi_\natural\cap\mathfrak{O}$ et $\mathfrak{B}\varrho\subset\mathcal{K}$, et $\chi_\natural\in\epsilon(\mathfrak{B})$ un caractère tel que $\langle\chi_\natural, T_{\natural,k}\rangle\neq 0$. Alors il existe un caractère $\chi\in\epsilon(\mathcal{K})$ tel que*

$$T*\chi(x)\neq 0 \quad \textit{et} \int_{\mathfrak{B}} \chi_\natural(u)\chi(u\varrho)\,d_B u\neq 0.$$

Démonstration. Voir la démonstration de [Lemaire 2004, 2.8]. Notons que puisque $T*\chi(x+k)=\chi(k)T*\chi(x)$ $(k\in\mathcal{K})$, la condition $T*\chi|_{x+\mathcal{K}}\neq 0$ obtenue en suivant cette démonstration-là est équivalente à $T*\chi(x)\neq 0$. □

Tout caractère $\chi\in\epsilon(\mathcal{K})$ est de la forme $k\mapsto\Psi_A(zk)$ pour un $z\in A$ déterminé de manière unique modulo $\mathcal{K}^\vee=\{y\in A:\Psi_A(y\mathcal{K})=1\}$; on pose alors $Z_\chi=z+\mathcal{K}^\vee\in A/\mathcal{K}^\vee$. On a donc $\chi^\vee=\mathrm{vol}(\mathcal{K}, d_A g)\mathbf{1}_{Z_\chi}$ $(\chi\in\epsilon(\mathcal{K}))$. Pour $a\in\mathbb{Z}$ et $\chi\in\epsilon(\mathfrak{A}^a)$, on note $n(\chi)$ le plus petit entier $b\geq a$ tel que $\chi|_{\mathfrak{A}^b}=1$. Et pour a, $b\in\mathbb{Z}$ tels que $b\geq a$, on pose $\epsilon_b(\mathfrak{A}^a)=\{\chi\in\epsilon(\mathfrak{A}^a):n(\chi)=b\}$; pour $\chi\in\epsilon(\mathfrak{A}^a)$, on a $\chi\in\epsilon_b(\mathfrak{A}^a)$ si et seulement si $Z_\chi\subset\mathfrak{A}^{(1/d)-b}\smallsetminus\mathfrak{A}^{(1/d)-b+1}$.

Proposition 3.12. *Il existe un entier $d_0=d_0(x,\mathfrak{A})$ tel que pour tous $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{Z}_{>a}$, $T\in J_H(A)$ et $\chi\in\epsilon_b(\mathfrak{A}^a)$ tels que $K^{b-a}\subset H$ et $T*\chi(x)\neq 0$, on a $Z_\chi\subset B+\mathfrak{A}^{a-b+d_0}$.*

Démonstration. Pour $T\in\mathfrak{D}(A)$ et $a\in\mathbb{Z}$, notons $T_{x,a}\in\mathfrak{D}(\mathfrak{A}^a)$ la distribution définie par $dT_{x,a}(y)=dT(x+y)$ $(y\in\mathfrak{A}^a)$.

Soit $T\in J_H(A)$ et $a\in\mathbb{Z}$. Pour $r\in\frac{1}{d}\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}_{>a}$ tel que $K^{r-a}\subset H$, $t\in\mathfrak{A}^a$ et $y\in\mathfrak{A}^{r-a}$, on a

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{1}_{t+\mathfrak{A}^r}, T_{x,a}\rangle &= \langle\mathbf{1}_{x+t+\mathfrak{A}^r}, T\rangle = \langle\mathbf{1}_{(1+y)^{-1}(x+t+\mathfrak{A}^r)(1+y)}, T\rangle\\ &= \langle\mathbf{1}_{x+t+xy-yx+\mathfrak{A}^r}, T\rangle = \langle\mathbf{1}_{t+xy-yx+\mathfrak{A}^r}, T_{x,a}\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit comme dans la démonstration de [Lemaire 2004, 3.2], que

$$\mathrm{Supp}(T_{x,a}^\vee)\cap\mathfrak{A}^{(1/d)-r}\subset\{g\in A: xg-gx\in\mathfrak{A}^{(1/d)-r+a}\}.$$

Puisque $\ker\{\mathrm{ad}\,x:A\to A\}=B$, il existe un entier c tel que pour tout $g\in A$, on a l'implication $xg-gx\in\mathfrak{A}^{1/d}\Rightarrow g\in B+\mathfrak{A}^c$. D'où l'inclusion

$$\mathrm{Supp}(T_{x,a}^\vee)\cap\mathfrak{A}^{(1/d)-b}\subset B+\mathfrak{A}^{c-b+a} \qquad (b\in\mathbb{Z}_{>a} \text{ tel que } K^{b-a}\subset H).$$

Soient maintenant $b \in \mathbb{Z}_{>a}$ et $\chi \in \epsilon_b(\mathfrak{A}^a)$ tels que $K^{b-a} \subset H$ et $T * \chi(x) \neq 0$. On a $T * \chi(x) = \langle \overline{\chi}, T_{x,a} \rangle = \langle \chi^\vee, T^\vee_{x,a} \rangle$, donc $\mathrm{Supp}(T^\vee_{x,a}) \cap Z_\chi \neq \varnothing$. Puisque $Z_\chi \subset \mathfrak{A}^{(1/d)-b}$, on obtient que $Z_\chi \cap (B + \mathfrak{A}^{c-b+a}) \neq \varnothing$. Posons $d_0 = \inf\{c, \frac{1}{d} - a\}$. Comme $Z_\chi + \mathfrak{A}^{(1/d)-a} = Z_\chi$, on a l'inclusion $Z_\chi \subset B + \mathfrak{A}^{d_0-b+a}$. □

Une distribution $T \in \mathfrak{D}(A)$ est dite $\mathcal{K}$*-admissible en* x si elle vérifie la propriété suivante : il existe un entier $m_0 = m_0(T, \mathcal{K}, x)$ tel que pour tous $a \in \mathbb{Z}_{\geq m_0}$ et $\chi \in \epsilon(\varpi^a \mathcal{K})$ tels que $T * \chi(x) \neq 0$, on a $Z_\chi \cap \mathfrak{N} \neq \varnothing$.

Continuons avec les notations introduites dans le paragraphe “Étude locales des réductions à B des caractères de H” (page 99). Pour $T \in J_H(A)$, notons θ_T la distribution H_x-invariante sur B définie par $\theta_T = T_{\natural,k_0}$.

Proposition 3.13. *Soit* $\mathcal{V}$ *un voisinage ouvert fermé de* $\mathfrak{N}_\natural \smallsetminus \{0\}$ *dans* $B \smallsetminus \{0\}$ *tel que* $F^\times \mathcal{V} = \mathcal{V}$, *et soit* $T \in J_H(A)$ *une distribution* $\mathfrak{A}$*-admissible en* x. *Il existe un entier* a *tel que pour tout* $\chi_\natural \in \epsilon(\mathfrak{A}_\natural^{a+a_0})$ *tel que* $\langle \overline{\chi}_\natural, \theta_T \rangle$, *on a l'inclusion* $\mathrm{Supp}(\chi_\natural^\vee) \subset \mathcal{V} \cup \mathfrak{A}_\natural^\mu$ *avec* $\mu = \delta'^{-1} - 2a - a_0 + 1$.

Démonstration. Posons $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \cap (\mathfrak{A} \smallsetminus \mathfrak{A}^1)$. Soient $d_0 = d_0(x, \mathfrak{A})$ et $\nu = \nu(s, \mathcal{V}^*)$ des entiers comme dans la proposition 3.12 et le lemme 3.6. Soit un entier $a > 0$ tel que :

(1) $\mathfrak{A}_\natural^{a+a_0} \subset \omega'^{k_0} \Xi_\natural \cap \mathfrak{O}$,

(2) $a \geq \frac{1}{d}\nu - d_0 + [\frac{1}{d}]$ où [ ] désigne la partie entière,

(3) $\mathcal{V}^* + \mathfrak{A}_\natural^{\delta'^{-1}+a-a_0} = \mathcal{V}^*$,

(4) $K^a \subset H$ et $a \geq m_0(T, \mathfrak{A}, x)$.

D'après la démonstration de [Lemaire 2004, 4.2], cet entier a convient. □

Proposition 3.14 [Lemaire 2004, 4.3]. *Soit* $T \in J_H(A)$ *une distribution* $\mathfrak{A}$*-admissible en* x. *La distribution* θ_T *est intégrable au voisinage de* 0 *dans* B. *Plus précisément, il existe un entier* m *et des constantes* $c_n(T)$ $(n \in \mathcal{N}_{H,\natural})$ *tels que*

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}_\natural^m} \cdot \Big(\theta_T - \sum_{n \in \mathcal{N}_{H,\natural}} c_n(T) \Theta^\vee_{\natural,n} \Big) = 0.$$

Corollaire 3.15 [Lemaire 2004, 4.4]. *La distribution* T *est intégrable au voisinage de* x *dans* H. *Plus précisément, il existe un entier* m *tel que*

$$T(x + u\varrho) = \sum_{n \in \mathcal{N}_{H,\natural}} c_n(T) \Theta^\vee_{\natural,n}(u)$$

pour presque tout $u \in \mathfrak{A}_\natural^m$ *(resp. pour tout* $u \in \mathfrak{A}_\natural^m \cap B'$*).*

Le paragraphe “Réduction aux éléments G-purs de H (descente parabolique)” (page 101) s’étend sans aucune difficulté à la situation présente. Notons que si x est élément *fermé* de A, alors x se décompose en $\bigoplus_{i=1}^{r} x_i$ comme plus haut. Mais on peut avoir $x_j = 0$ pour un (unique) indice j ; c’est pourquoi, pour x *pur*, on a remplacé $(1+ub^{-1}\varrho b)x$ par $x+b^{-1}ub\varrho$ dans la définition de ζ_b. En définitive, on obtient :

Thórème 3.16. *Soit $T \in J_H(A)$ une distribution $\mathfrak{A}$-admissible en x pour tout élément fermé $x \in A$. Alors T est localement intégrable sur A (avec décomposition au voisinage des éléments fermés de A comme au corollaire 3.15), localement constante sur A_{r}.*

Démonstration de la proposition 2.1. D’après 2.7 et 2.33, il nous reste à montrer que pour tous $T \in J_H^*(A)$ et $y \in A \smallsetminus \{0\}$, la distribution $T^\vee$ est intégrable au voisinage de y dans A.

Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de $(A,+)$.

Lemme 3.17. *Soient $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{K} \subset \mathfrak{A}^{(1/d)-b}$, $T \in J_H(\varpi^{b+1}\Xi)$ et $\chi \in \epsilon(\mathcal{K})$. Si $T^\vee * \chi \neq 0$, alors $Z_\chi \cap \mathfrak{N} \neq \varnothing$.*

Démonstration. On a (calcul facile)

$$T^\vee * \chi(y) = \mathrm{vol}(\mathcal{K}, d_A g) \int_{Z_\chi} \overline{\Psi_A(gy)}\, dT(g) \qquad (y \in A).$$

Par conséquent, si $T^\vee * \chi \neq 0$, alors $Z_\chi \cap \varpi^{b+1}\Xi \neq \varnothing$. D’après [Lemaire 2004, 1.2 et démonstration de 1.3], on a $\varpi^{b+1}\Xi \subset {}^{G}(\mathfrak{A}^b) \subset \mathfrak{N} + \mathfrak{A}^b$. D’où le lemme puisque $\mathfrak{A}^b \subset \mathcal{K}^\vee$ et $Z_\chi + \mathcal{K}^\vee = Z_\chi$. □

Soit maintenant $T \in J_H^*(A)$. Il existe un entier b tel que $\mathrm{Supp}(T) \subset \varpi^{b+1}\Xi$. Soit $m_0 = 1-b$. Alors pour tous $a \in \mathbb{Z}_{\geq m_0}$ et $\chi \in \epsilon(\mathfrak{A}^a)$ tels que $T^\vee * \chi \neq 0$, on a $Z_\chi \cap \mathfrak{N} \neq \varnothing$. En particulier, la distribution $T^\vee$ est $\mathfrak{A}$-admissible en tout point de A. On peut donc appliquer le théorème 3.16. Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1. □

4. Intégrabilité locale des caractères de G' : une méthode générale

Cette section est indépendante de celles qui la précèdent. En particulier, certaines notations introduites ci-dessous, bien que déjà utilisées dans les sections 1 à 3, désignent ici des objets beaucoup plus généraux que ceux qu’elles y désignaient.

Soit H un groupe topologique localement profini possédant une base dénombrable d’ouverts, et soient G', $C \subset H$ deux sous-groupes fermés distingués tels que :

- $G' \cap C = \{1\}$,
- le groupe C est central dans H et discret (pour la topologie induite),

– le groupe $CG'\backslash H$ est commutatif et compact (pour la topologie quotient).

On pose $\tilde{G} = CG'$ (produit direct). Soit $\{K^a : a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ une famille de sous-groupes ouverts compacts de H telle que :

– pour $a \geq 1$, K^a est distingué dans K^0,

– pour tout voisinage ouvert Ω de 1 dans H, il existe un entier $a \geq 0$ tel que $K^a \subset \Omega$.

Puisque H possède une base dénombrable d'ouverts, une telle famille existe. On pose $K = K^0$ et $K'^a = K^a \cap G'$ $(a \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$. Puisque C est discret dans H, il existe un entier $a_0 \geq 0$ tel que $K^{a_0} \cap C = \{1\}$. *On suppose que les groupes H et G' sont unimodulaires*. Le groupe $\tilde{G}$ est alors lui aussi unimodulaire.

Soit (π', W) une représentation complexe lisse admissible irréductible de G'. Notons $(\tilde{\pi}, W)$ la représentation de $\tilde{G}$ définie par $\tilde{\pi}(zg) = \pi'(g')$ pour tous $z \in C$ et $g' \in G'$. *On suppose que la représentation $(\tilde{\pi}, W)$ de $\tilde{G}$ s'étend en une représentation lisse (π, W) de H*. Puisque π' est admissible, π l'est aussi. Soit $\mathrm{ind}_{\tilde{G}}^H W$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions $\phi : H \to W$ telles que :

– $\phi(\tilde{g}h) = \tilde{\pi}(\tilde{g})(\phi(h))$ pour tous $\tilde{g} \in \tilde{G}$, $h \in H$,

– il existe un sous-groupe ouvert compact $K_\phi \subset H$ tel que $\phi(hk) = \phi(h)$ pour tous $h \in H$, $k \in K_\phi$.

Soit $(\sigma, V) = (\mathrm{ind}_{\tilde{G}}^H \tilde{\pi}, \mathrm{ind}_{\tilde{G}}^H W)$ la représentation de H définie par $\sigma(h)(\phi)(h') = \phi(h'h)$ $(h,\ h' \in H\,;\, \phi \in V)$; i.e., l'induite lisse de $\tilde{\pi}$ à H. Puisque $\tilde{G}$ est cocompact dans H, la représentation σ est admissible. Posons $\epsilon = \epsilon(\tilde{G}\backslash H)$.

Lemme 4.1. *Les représentations $\pi \otimes \chi$ $(\chi \in \epsilon)$ sont deux à deux non équivalentes, et l'on a $\sigma \simeq \bigoplus_{\chi \in \epsilon} \pi \otimes \chi$.*

Démonstration. Soient $\chi,\ \chi' \in \epsilon$, et $\gamma \in \mathrm{Hom}_H(\pi \otimes \chi, \pi \otimes \chi')$ tel que $\gamma \neq 0$. Par restriction, γ définit un élément de $\mathrm{Hom}_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, \tilde{\pi})$, par suite $\gamma \in \mathbb{C}^\times$ (lemme de Schur) et $\chi = \chi'$. Les représentations $\pi \otimes \chi$ $(\chi \in \epsilon)$ sont donc deux à deux non équivalentes.

Posons $\mathfrak{F} = C^\infty(\tilde{G}\backslash H)$. L'application

$$\mathfrak{F} \otimes_{\mathbb{C}} W \xrightarrow{\iota} V, \quad f \otimes w \mapsto (h \mapsto f(h)\pi(h)(w))$$

est $\mathbb{C}$-linéaire, et H-équivariante pour l'opération de H sur $\mathfrak{F} \otimes_{\mathbb{C}} W$ donnée par

$$h \cdot (f \otimes w) = f_h \otimes \pi(h)(w), \quad f_h(h') = f(h'h) \qquad (h,\ h' \in H).$$

L'injectivité de ι est claire. Montrons la surjectivité. Soit $X \subset H$ une partie compacte telle que $H = \tilde{G}X$. Soit $\phi \in V$. L'ensemble $Y = \{\pi(x^{-1})(\phi(x)) : x \in X\}$ est fini, par conséquent il existe un sous-groupe ouvert compact $J \subset H$ tel que $\phi(hj) = \phi(h)$ $(h \in H,\ j \in J)$ et $\pi(j)(y) = y$ $(y \in Y,\ j \in J)$. Soient $x_1, \ldots, x_r \in X$ un système de représentants des doubles classes $\tilde{G}\backslash H/J$. Écrivons $\phi = \sum_{i=1}^r \phi_i$

avec $\mathrm{Supp}(\phi_i) \subset \tilde{G}x_iJ$. Pour $i = 1, \ldots, r$, on a $\phi_i = \iota(\mathbf{1}_{\tilde{G}\backslash\tilde{G}x_iJ} \otimes w_i)$ avec $w_i = \pi(x_i^{-1})(\phi_i(x_i))$. D'où la surjectivité de ι.

Les éléments de ϵ forment une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{F}$, et pour $\chi \in \epsilon$, on a $h \cdot (\chi \otimes w) = \chi \otimes (\pi \otimes \chi)(h)(w)$ $(w \in W)$. D'où lemme. □

Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}$ et $\chi \in \epsilon$, on pose $\chi_a = \chi|_{K^a} \in \epsilon(K'^a\backslash K^a) \subset \epsilon(K^a)$; et l'on note $V^{K^a} \subset V$ le sous-espace des points fixés par K^a et $W(\chi_a^{-1}) \subset W$ la composante χ_a^{-1}-isotypique de π. D'après l3 lemme 4.1, on a la décomposition

$$V^{K^a} \simeq \bigoplus_{\chi\in\epsilon} W(\chi_a^{-1}) \qquad (a \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}). \tag{4.2}$$

Puisque la représentation σ est admissible, l'ensemble des χ intervenant dans la décomposition (4.2) est fini ; i.e., $W(\chi_a^{-1}) = 0$ pour presque tout $\chi \in \epsilon$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}$, on pose $\epsilon_a = \epsilon(\tilde{G}K^a\backslash H) \subset \epsilon$, et l'on note $b(\pi, a)$ le plut petit entier $b \geq a$ tel que $\{\chi \in \epsilon : W(\chi_a^{-1}) \neq 0\} \subset \epsilon_b$. On a donc les inclusions

$$W^{K^a} \subset W^{K'^a} \subset W^{K^{b(\pi,a)}} \qquad (a \in \mathbb{Z}_{\geq a_0});$$

précisément, $b(\pi, a)$ est le plus petit entier $b \geq a$ tel que $W^{K'^a} \subset W^{K^b}$.

Soient dh et $d\tilde{g}$ les mesures de Haar respectivement sur H et $\tilde{G}$ normalisées par K. Posons $dk = dh|_K$, $dg' = d\tilde{g}|_{G'}$ et $dk' = dg'|_{K'}$. Soit $\kappa = (H : \tilde{G}K)$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}$, on a

$$|\epsilon_a| = (H : \tilde{G}K^a) = \kappa(\tilde{G}K : \tilde{G}K^a) = \kappa \frac{(K : K^a)}{(\tilde{K} : K'^a)} = \kappa\, c_a^{-1}c'_a \tag{4.3}$$

avec $\tilde{K} = K \cap \tilde{G}$, $c_a = \mathrm{vol}(K^a, dk)$ et $c'_a = \mathrm{vol}(K'^a, dk')$.

Pour toute représentation complexe lisse admissible τ de H, on note $\Theta_\tau \in \mathfrak{D}(H)$ la distribution trace$(\tau\, dh)$. De même, pour toute représentation complexe lisse admissible $\tilde{\tau}$ de $\tilde{G}$ (resp. τ' de G'), on pose $\Theta_{\tilde{\tau}} = \mathrm{trace}(\tilde{\tau}\, d\tilde{g}) \in \mathfrak{D}(\tilde{G})$ et $\Theta_{\tau'} = \mathrm{trace}(\tau'\, dg') \in \mathfrak{D}(G')$. Pour simplifier l'écriture, si τ est une représentation lisse de H et $f \in C_c^\infty(H)$, on écrira $\tau(f)$ au lieu $\tau(f\, dh)$ $(= \int_H f(h)\tau(h)\, dh)$.

Pour $f \in C_c^\infty(H)$ et $\Omega \subset H$ une partie ouverte compacte, on note $f_\Omega \in C_c^\infty(H)$ la fonction définie par $f_\Omega(y) = \mathrm{vol}(\Omega, dh)^{-1} \int_\Omega f(h^{-1}yh)\, dh$. Et pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, on note ${}_Cf \in C_c^\infty(G')$ la fonction définie par ${}_Cf(g') = \sum_{z\in C} f(zg')$ (puisque C est discret et $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, cette somme est finie).

Supposons que $h_1, \ldots, h_s \in H$ forment un système de représentants des doubles classes $\tilde{G}\backslash H/K^{a_0}$. Puisque $\tilde{G}$ et $\tilde{G}K^{a_0}$ sont distingués dans H, on a

$$H = \coprod_{i=1}^{s} h_i\tilde{G}K^{a_0} = \coprod_{i=1}^{s} \tilde{G}K^{a_0}h_i.$$

Soit $X = \coprod_{i=1}^{s} K^{a_0}h_i$.

Proposition 4.4. *Soit (π'_1, W_1) une représentation complexe lisse admissible de G'. Soit $\tilde{\pi}_1$ la représentation de $\tilde{G}$ définie par $\tilde{\pi}_1(zg') = \pi'_1(g')$ pour tous $z \in C$ et $g' \in G'$, et soit $\sigma_1 = \mathrm{ind}_{\tilde{G}}^{H} \tilde{\pi}_1$. Pour $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(H)$, on a*

$$\langle f, \Theta_{\sigma_1} \rangle = \kappa \langle f_X|_{\tilde{G}}, \Theta_{\tilde{\pi}_1} \rangle = \kappa \langle {}_C(f_X|_{\tilde{G}}), \Theta_{\pi'_1} \rangle.$$

Démonstration. Soit $C^{\infty}(X, W_1)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions localement constantes $X \to W_1$, canoniquement identifié à $C^{\infty}(X) \otimes_{\mathbb{C}} W_1$. Pour tout sous-groupe ouvert $J \subset K^{a_0}$, on pose $C(J\backslash X, W_1) = C(J\backslash X) \otimes_{\mathbb{C}} W_1 \subset C^{\infty}(X, W_1)$. L'application $V_1 = \mathrm{ind}_{\tilde{G}}^{H} W_1 \to C^{\infty}(X, W_1)$, $\phi \mapsto \phi|_X$ est un $\mathbb{C}$-isomorphisme de V_1 sur le sous-espace vectoriel $\mathfrak{H} \subset C^{\infty}(X, W_1)$ formé des fonctions $\eta : X \to W_1$ telles que $\eta(k'x) = \pi'_1(k')(\eta(x))$ pour tous $k' \in K'^{a_0}$ et $x \in X$. Soit $\rho : K^{a_0} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(C^{\infty}(X))$ la représentation (admissible) définie par $\rho(k)(\alpha)(x) = \alpha(k^{-1}x)$ ($k \in K^{a_0}$, $\alpha \in C^{\infty}(X)$, $x \in X$). Le $\mathbb{C}$-endomorphisme u de $C^{\infty}(X, W_1)$ défini par $u(\alpha \otimes w) = c_0'^{-1} \int_{K'^{a_0}} \rho(k')(\alpha) \otimes \pi'_1(k')(w)\, dk'$ ($\alpha \in C^{\infty}(X)$, $w \in W_1$) avec $c'_0 = c'_{a_0}$, est un projecteur de $C^{\infty}(X, W_1)$ sur $\mathfrak{H}$: on a $\mathrm{Im}\, u = \mathfrak{H}$ et $u|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{H}}$.

Soit $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(H)$. Choisissons des entiers $a,\ b \geq a_0$ tels que $f \in C_{\mathrm{c}}(K^a\backslash H/K^a)$ et $K^b \subset h_i K^a h_i^{-1} \subset K^{a_0}$ ($i = 1, \dots, s$). On a donc $\sigma(f)(V_1) \subset V_1^{K^a}$ et $XK^a = X$. Et puisque K^{a_0} normalise K^b, pour $\phi \in V_1^{K^a}$ on a $\phi(kx) = \phi(x)$ ($k \in K^b$, $x \in X$), par conséquent $\phi|_X \in C(K^b\backslash X, W_1) \cap \mathfrak{H} \subset C(K^b\backslash X, W_1^{K'^b})$. Identifions V_1 à $\mathfrak{H}$ via l'isomorphisme $\phi \mapsto \phi|_X$. Puisque $C(K^b\backslash X, W_1^{K'^b})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'opérateur $\sigma_1(f) \circ u$ sur $C^{\infty}(X, W_1)$ est de rang fini, et l'on a l'égalité $\langle f, \Theta_{\sigma_1} \rangle = \mathrm{trace}(\sigma_1(f) \circ u)$.

Soit $W_1(K'^b)$ le sous-espace vectoriel de W_1 engendré par les $w - \pi'_1(k')w$ pour $w \in W_1$ et $k' \in K'^b$. On a la décomposition $W_1 = W_1^{K'^b} \oplus W_1(K'^b)$. De même, on a la décomposition $C^{\infty}(X) = C^{\infty}(X)^{K^b} \oplus C^{\infty}(X)(K^b)$ avec $C^{\infty}(X)^{K^b} = C(K^b\backslash X)$ et $C^{\infty}(X)(K^b) = \langle \alpha - \rho(k)(\alpha) : \alpha \in C^{\infty}(X),\ k \in K^b \rangle$. Puisque $K'^b \subset K^b$, on a (calcul facile) $u(C^{\infty}(K^b\backslash X) \otimes_{\mathbb{C}} W_1(K'^b)) = 0$. Par ailleurs, le sous-espace vectoriel $V_1(K^a) = \langle \phi - \sigma_1(k)(\phi) : \phi \in V_1,\ k \in K^a \rangle \subset V_1$ s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathfrak{H}$ formé des fonctions $\alpha : X \to W_1$ telles que $\int_{K^a} \alpha(xk)\, dk = 0$. Puisque K^b normalise K'^{a_0} et $K^b x \subset xK^a$ ($x \in X$), on a l'inclusion $u(C^{\infty}(X)(K^b) \otimes_{\mathbb{C}} W_1) \subset V_1(K^a)$. Puisque $\sigma_1(f)(V_1(K^a)) = 0$, on obtient que $\langle f, \Theta_{\sigma_1} \rangle$ coïncide avec la trace de l'opérateur $\sigma_1(f) \circ u$ sur l'espace vectoriel $C(K^b\backslash X, W_1^{K'^b})$.

Soit $(\pi_1'^{\vee}, W_1^{\vee})$ la représentation contragrédiente de π'_1. Le morphisme de dualité $W_1 \times W_1^{\vee} \to \mathbb{C}$, $(w, w^{\vee}) \mapsto \langle w, w^{\vee} \rangle$ induit par restriction une forme bilinéaire non dégénérée sur $W_1^{K'^b} \times (W_1^{\vee})^{K'^b}$. Soit $(\phi, \varphi) \mapsto \langle \phi, \varphi \rangle$ la forme bilinéaire non dégénérée sur $C(K^b\backslash X, W_1^{K'^b}) \times C(K^b\backslash X, (W_1^{\vee})^{K'^b})$ définie par

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{s} \int_{K^{a_0}} \langle \phi(kh_i), \varphi(kh_i) \rangle\, dk.$$

Soit $\mathfrak{B}$ une $\mathbb{C}$-base de $W_1^{K'^b}$, et soit $\mathfrak{B}^\vee = \{w^\vee : w \in \mathfrak{B}\}$ la $\mathbb{C}$-base de $(W_1^\vee)^{K'^b}$ duale de $\mathfrak{B}$. Soit $\mathfrak{C}_0$ une $\mathbb{C}$-base de $C(K^b\backslash K^{a_0})$, et soit $\mathfrak{C}$ la $\mathbb{C}$-base de $C(K^b\backslash X)$ définie par $\mathfrak{C} = \{\alpha_i : \alpha \in \mathfrak{C}_0,\ i = 1, \dots, s\}$ avec $\mathrm{Supp}(\alpha_i) \subset K^{a_0}h_i$ et $\alpha_i(kh_i) = \alpha(k)$ ($k \in K^{a_0}$). Posons $c = c_b$. Alors $\{c^{-1}\alpha \otimes w^\vee : \alpha \in \mathfrak{C},\ w \in \mathfrak{B}\}$ est la base de $C(K^b\backslash X, (W_1^\vee)^{K'^b})$ duale de $\{\alpha \otimes w : \alpha \in \mathfrak{C},\ w \in \mathfrak{B}\}$ pour la dualité définie plus haut. On a donc

$$\begin{aligned}\langle f, \Theta_{\sigma_1}\rangle &= c^{-1}\sum_{\alpha\in\mathfrak{C}}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\langle \sigma_1(f)\circ u(\alpha\otimes w), \alpha\otimes w^\vee\rangle \\ &= c^{-1}\sum_{\alpha\in\mathfrak{C}}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\sum_{i=1}^{s}\int_{K^{a_0}}\alpha(kh_i)\langle\sigma_1(f)\circ u(\alpha\otimes w)(kh_i), w^\vee\rangle\,dk \\ &= c^{-1}\sum_{i=1}^{s}\sum_{\alpha\in\mathfrak{C}_0}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\int_{K^{a_0}}\alpha(k)\langle\sigma_1(f)\circ u(\alpha_i\otimes w)(kh_i), w^\vee\rangle\,dk.\end{aligned}$$

Pour $(\phi, w) \in \mathfrak{C}\times\mathfrak{B}$ et $x \in X$, on a

$$u(\alpha\otimes w)(x) = c_0'^{-1}\int_{K'^{a_0}}\alpha(k'^{-1}x)\otimes\pi_1'(k')(w)\,dk'$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_1(f)\circ u(\alpha\otimes w)(x) &= \int_H f(h)u(\alpha\otimes w)(xh)\,dh \\ &= \sum_{i=1}^{s}\int_{\tilde{G}K^{a_0}} f(x^{-1}hh_i)u(\alpha\otimes w)(hh_i)\,dh \\ &= c_0'^{-1}\sum_{i=1}^{s}\iint_{\tilde{G}\times K^{a_0}} f(x^{-1}\tilde{g}kh_i)\tilde{\pi}_1(\tilde{g})(u(\alpha\otimes w)(kh_i))\,d\tilde{g}\,dk;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}&\sigma_1(f)\circ u(\alpha\otimes w)(x) \\ &\quad = c_0'^{-2}\sum_{i=1}^{s}\iiint_{\tilde{G}\times K^{a_0}\times K'^{a_0}} f(x^{-1}\tilde{g}kh_i)\alpha(k'^{-1}kh_i)\otimes\tilde{\pi}_1(\tilde{g}k')(w)\,d\tilde{g}\,dk\,dk' \\ &\quad = c_0'^{-1}\sum_{i=1}^{s}\iint_{\tilde{G}\times K^{a_0}} f(x^{-1}\tilde{g}kh_i)\alpha(kh_i)\otimes\tilde{\pi}_1(\tilde{g})(w)\,d\tilde{g}\,dk.\end{aligned}$$

Soit $f_X^* \in C_c^\infty(\tilde{G})$ la fonction définie par $f_X^* = \mathrm{vol}(X, dh)f_X|_{\tilde{G}}$. Pour $\tilde{g} \in \tilde{G}$, on a $f_X^*(\tilde{g}) = \sum_{i=1}^{s}\int_{K^{a_0}} f(h_i^{-1}k^{-1}\tilde{g}kh_i)\,dk$. Puisque $x^{-1}K^bx \subset K^a$ ($x \in X$) et

$f \in C_{\mathrm{c}}(K^a\backslash H/K^a)$, on a $f_X^* \in C_{\mathrm{c}}(K'^b\backslash \tilde{G}/K'^b)$ et

$$\begin{aligned}\langle f, \Theta_{\sigma_1}\rangle &= (cc_0')^{-1}\sum_{i=1}^{s}\sum_{\alpha\in\mathfrak{C}_0}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\int_{K^{a_0}}\alpha(k_1)\cdots \\ &\qquad\cdots\left(\iint_{\tilde{G}\times K^{a_0}} f(h_i^{-1}k_1^{-1}\tilde{g}k_2h_i)\alpha(k_2)\langle\tilde{\pi}_1(\tilde{g})(w), w^\vee\rangle\, d\tilde{g}\, dk_2\right) dk_1 \\ &= c(cc_0')^{-1}\sum_{i=1}^{s}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\iint_{\tilde{G}\times K^{a_0}} f(h_i^{-1}k^{-1}\tilde{g}kh_i)\langle\tilde{\pi}_1(\tilde{g})(w), w^\vee\rangle\, d\tilde{g}\, dk \\ &= c_0'^{-1}\sum_{w\in\mathfrak{B}}\int_{\tilde{G}} f_X^*(\tilde{g})\langle\tilde{\pi}_1(\tilde{g})(w), w^\vee\rangle\, d\tilde{g}.\end{aligned}$$

Or $f_X^* = sc_0 f_X|_{\tilde{G}}$ avec $c_0 = c_{a_0}$, et

$$\sum_{w\in\mathfrak{B}}\int_{\tilde{G}} f_X(\tilde{g})\langle\tilde{\pi}_1(\tilde{g})(w), w^\vee\rangle\, d\tilde{g} = \langle f_X|_{\tilde{G}}, \Theta_{\tilde{\pi}_1}\rangle.$$

En définitive, on obtient que

$$\langle f, \Theta_{\sigma_1}\rangle = s\, c_0 c_0'^{-1}\langle f|_{\tilde{G}}, \Theta_{\tilde{\pi}_1}\rangle.$$

Mais $s = |\epsilon_{a_0}| = \kappa\, c_0^{-1}c_0'$ d'après (4.3), d'où l'égalité $\langle f, \Theta_{\sigma_1}\rangle = \kappa\langle f_X|_{\tilde{G}}, \Theta_{\tilde{\pi}_1}\rangle$.

Puisque G' est ouvert dans $\tilde{G}$, on a

$$\begin{aligned}\langle f_X|_{\tilde{G}}, \Theta_{\tilde{\pi}_1}\rangle &= \mathrm{trace}\left(\int_{\tilde{G}} f_X(\tilde{g})\tilde{\pi}_1(\tilde{g})\, d\tilde{g}\right) \\ &= \mathrm{trace}\left(\int_{G'} c(f_X|_{\tilde{G}})(g')\pi_1'(g')\, dg'\right) = \langle c(f_X|_{\tilde{G}}), \Theta_{\pi_1'}\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Corollaire 4.5. *Pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$, on a*

$$\langle f, \Theta_\sigma\rangle = \kappa\langle f|_{\tilde{G}}, \Theta_{\tilde{\pi}}\rangle = \kappa\langle c(f|_{\tilde{G}}), \Theta_{\pi'}\rangle.$$

Démonstration. Puisque π prolonge $\tilde{\pi}$, pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(X, dh)\langle f_X|_{\tilde{G}}, \Theta_{\tilde{\pi}}\rangle &= \mathrm{trace}\left(\sum_{i=1}^{s}\iint_{\tilde{G}\times K^{a_0}} f(\tilde{g})\tilde{\pi}(h_ik\tilde{g}k^{-1}h_i^{-1})\, d\tilde{g}\, dk\right) \\ &= \mathrm{trace}\left(\sum_{i=1}^{s}\int_{K^{a_0}}\pi(h_ik)\tilde{\pi}(f|_{\tilde{G}})\pi(k^{-1}h_i^{-1})\, dk\right) \\ &= s\, c_{a_0}\langle f|_{\tilde{G}}, \Theta_{\tilde{\pi}}\rangle.\end{aligned}$$

D'où le corollaire. □

Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on pose $e_a = c_a^{-1}\mathbf{1}_{K^a} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$ et l'on note $\Theta_{\pi,a} : H \to \mathbb{C}$ la fonction (K^a-biinvariante) définie par

$$\Theta_{\pi,a}(h) = \mathrm{trace}\big(\pi(e_a)\pi(h)\pi(e_a)\big) = c_a^{-1}(K^a : K^a \cap h^{-1}K^a h)^{-1}\,\mathrm{trace}(\pi(\mathbf{1}_{K^a hK^a})).$$

Pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$, on a $\langle f, \Theta_\pi\rangle = \langle f, \Theta_{\pi,a}\,dh\rangle$ pour tout $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $f \in C_{\mathrm{c}}(K^a\backslash H/K^a)$. La distribution Θ_π est donc limite faible des distributions $\Theta_{\pi,a}\,dh$ quand a tend vers $+\infty$.

Proposition 4.6. *Soit $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}$, et posons $b_1 = b(\pi, a_1)$. Pour $f \in C_{\mathrm{c}}(K^{a_1}\backslash H/K^{a_1})$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq b_1}$, on a $\langle f, \Theta_\sigma\rangle = \kappa\int_{\tilde{G}} f(\tilde{g})\Theta_{\pi,a}(\tilde{g})\,d\tilde{g}$.*

Démonstration. Soient $f \in C_{\mathrm{c}}(K^{a_1}\backslash H/K^{a_1})$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq b_1}$. D'après le lemme 4.1, on a

$$\langle f, \Theta_\sigma\rangle = \mathrm{trace}\big(\sigma(f) : V^{K^{a_1}} \to V^{K^{a_1}}\big) = \sum_{\chi\in\epsilon_a}\langle f, \Theta_{\pi\otimes\chi}\rangle$$

avec $\langle f, \Theta_{\pi\otimes\chi}\rangle = \langle \chi f, \Theta_\pi\rangle$. Soit $X_a \subset H$ un système de représentants des classes $\tilde{G}K^a\backslash H$. On a

$$\begin{aligned}\langle f, \Theta_\sigma\rangle &= \sum_{\chi\in\epsilon_a}\mathrm{trace}\left(\int_H(\chi f)(h)\pi(h)\,dh\right)\\ &= \mathrm{trace}\Bigg(\sum_{\chi\in\epsilon_a}\sum_{x\in X_a}\int_{\tilde{G}K^a}(\chi f)(hx)\pi(hx)\,dh\Bigg)\\ &= \mathrm{trace}\Bigg(\sum_{x\in X_a}\Xi_a(x)\int_{\tilde{G}K^a} f(hx)\pi(hx)\,dh\Bigg)\end{aligned}$$

avec $\Xi_a(h) = \sum_{\chi\in\epsilon_a}\chi(h)$ $(h \in H)$. Puisque $\Xi_a = |\epsilon_a|\,\mathbf{1}_{\tilde{G}K^a}$, on obtient que

$$\langle f, \Theta_\sigma\rangle = |\epsilon_a|\cdot\mathrm{trace}\left(\int_{\tilde{G}K^a} f(h)\pi(h)\,dh\right).$$

Posons $c = c_a$ et $c' = c'_a$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{G}K^a} f(h)\pi(h)\,dh &= c^{-1}\iint_{K^a\times\tilde{G}K^a} f(k_1h)\pi(k_1h)\,dk_1\,dh\\ &= (cc')^{-1}\iiint_{K^a\times\tilde{G}\times K^a} f(k_1\tilde{g}k_2)\pi(k_1\tilde{g}k_2)\,dk_1\,d\tilde{g}\,dk_2\\ &= c^2(cc')^{-1}\int_{\tilde{G}} f(\tilde{g})\pi(e_a)\pi(\tilde{g})\pi(e_a)\,d\tilde{g}.\end{aligned}$$

Or $cc'^{-1} = \kappa\cdot|\epsilon_a|^{-1}$; voir (4.3). D'où l'on déduit que

$$\langle f, \Theta_\sigma\rangle = \kappa\cdot\mathrm{trace}\left(\int_{\tilde{G}} f(\tilde{g})\pi(e_a)\pi(\tilde{g})\pi(e_a)\,d\tilde{g}\right) = \kappa\int_{\tilde{G}} f(\tilde{g})\Theta_{\pi,a}(\tilde{g})\,d\tilde{g}. \qquad\square$$

Corollaire 4.7. *Pour $f' \in C_{\mathrm{c}}(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1})$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq b_1}$, on a*

$$\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \int_{G'} f'(g')\Theta_{\pi,a}(g')\,dg'.$$

Démonstration. Soient $f' \in C_{\mathrm{c}}^\infty(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1})$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq b_1}$. Soit $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$ la fonction prolongeant f' définie par

$$f \in C_{\mathrm{c}}(K^{a_1}\backslash H/K^{a_1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}(f) = K^{a_1}\,\mathrm{Supp}(f')K^{a_1}.$$

D'après 4.5 et 4.6, on a

$$\langle {}_C(f|_{\tilde{G}}), \Theta_{\pi'}\rangle = \kappa^{-1}\langle f, \Theta_\sigma\rangle = \int_{\tilde{G}} f(\tilde{g})\Theta_{\pi,a}(\tilde{g})\,d\tilde{g}.$$

Puisque $\mathrm{Supp}(f|_{\tilde{G}}) \subset G'$, on a ${}_C(f|_{\tilde{G}}) = f'$ et

$$\int_{\tilde{G}} f(\tilde{g})\Theta_{\pi,a}(\tilde{g})\,d\tilde{g} = \int_{G'} f'(g')\Theta_{\pi,a}(g')\,dg'.$$

D'où le corollaire. □

La distribution $\Theta_{\pi'}$ est donc limite faible des distributions $\Theta_{\pi,a}|_{G'}\,dg'$ quand a tend vers $+\infty$. Les deux propositions suivantes sont naturellement impliquées par le corollaire 4.7, et seront utilisées dans la démonstration du théorème 4.12.

Proposition 4.8. *On suppose la distribution Θ_π localement intégrable sur H. On choisit une fonction $\lambda_\pi : H \to \mathbb{C}$ localement intégrable par rapport à dh telle que $\Theta_\pi = \lambda_\pi\,dh$. Soit $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}$, et posons $b_1 = b(\pi, a_1)$. Pour $f' \in C_{\mathrm{c}}(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1})$, il existe une partie dense $\mathcal{V}_{\lambda_\pi,a_1}(f') \subset K^{b_1}$ telle que pour tout $k \in \mathcal{V}_{\lambda_\pi,a_1}(f')$, on a $\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \int_{G'} f'(g')\lambda_\pi(g'k)\,dg'$ (intégrale absolument convergente).*

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a $\Theta_{\pi,a}(h) = c_a^{-2}\iint_{K^a\times K^a}\lambda_\pi(k_1hk_2)\,dk_1\,dk_2$ ($h \in H$). Puisque Θ_π est une distribution H-invariante sur H, fixé un élément $y \in H$, on a $\lambda_\pi(y^{-1}hy) = \lambda_\pi(h)$ pour presque tout $h \in H$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a donc aussi $\Theta_{\pi,a}(h) = c_a^{-1}\int_{K^a}\lambda_\pi(hk)\,dk$ ($h \in H$). D'après 4.7, pour $f' \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G')$, on a

$$\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \lim_{a\to+\infty} c_a^{-1}\iint_{G'\times K^a} f'(g')\lambda_\pi(g'k)\,dg'\,dk;$$

plus précisément, pour $f' \in C_{\mathrm{c}}(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1})$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq b_1}$, on a

$$\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = c_a^{-1}\iint_{G'\times K^a} f'(g')\lambda_\pi(g'k)\,dg'\,dk.$$

Soit $f' \in C_{\mathrm{c}}(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1})$. Notons $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$ la fonction prolongeant f' définie par $f \in C_{\mathrm{c}}(K^{a_1}\backslash H/K^{a_1})$ et $\mathrm{Supp}(f) = K^{a_1}\,\mathrm{Supp}(f')K^{a_1}$. La fonction $H \to \mathbb{C}$, $h \mapsto f(h)\lambda_\pi(h)$ est intégrable par rapport à dh. Par conséquent (théorème de Fubini), pour presque tout $h \in H$, la fonction $\tilde{G} \to \mathbb{C}$, $\tilde{g} \mapsto f(\tilde{g}h)\lambda_\pi(\tilde{g}h)$ est intégrable par rapport à $d\tilde{g}$; et la fonction $\Phi_f : \tilde{G}\backslash H \to \mathbb{C}$, définie presque partout par $\Phi_f(h) = \int_{\tilde{G}} f(\tilde{g}h)\lambda_\pi(\tilde{g}h)\, d\tilde{g}$, est intégrable par rapport à $dh/d\tilde{g}$.

L'ensemble ϵ des caractères de lisses de $\tilde{G}\backslash H$ est muni d'une structure de groupe topologique discret : c'est le dual de Pontryagin du groupe abélien compact $\tilde{G}\backslash H$. Notons $C_0(\tilde{G}\backslash H)$ (resp. $L^1(\tilde{G}\backslash H)$) l'espace des fonctions continues (resp. intégrables par rapport à $dh/d\tilde{g}$) $\tilde{G}\backslash H \to \mathbb{C}$. Soit $\Phi_f^\vee : \epsilon \to \mathbb{C}$ la transformée de Fourier de Φ_f, définie par

$$\Phi_f^\vee(\chi) = \int_{\tilde{G}\backslash H} \Phi_f(h)\chi(h^{-1})\frac{dh}{d\tilde{g}} \qquad (\chi \in \epsilon)$$

(voir [Rudin 1962, 1.2.3]). Pour $\chi \in \epsilon$, on a (calcul facile) $\Phi_f^\vee(\chi) = \langle f, \Theta_{\pi\otimes\chi^{-1}}\rangle$. Par conséquent 4.1 $\Phi_f^\vee(\chi) = 0$ pour tout $\chi \in \epsilon \smallsetminus \epsilon_{b_1}$, donc $\sum_{\chi\in\epsilon} |\Phi_f^\vee(\chi)| < +\infty$. On peut donc définir la transformée de Fourier $(\Phi_f^\vee)^\vee \in C_0(\tilde{G}\backslash H)$:

$$(\Phi_f^\vee)^\vee(h) = \sum_{\chi\in\epsilon} \Phi_f^\vee(\chi)\chi(h^{-1}) \qquad (h \in \tilde{G}\backslash H).$$

Puisque $\Phi_f^\vee \in L^1(\epsilon) \cap L^1(\tilde{G}\backslash H)^\vee$, on peut appliquer le théorème d'inversion de Fourier [Rudin 1962, 1.5.1] : $(\Phi_f^\vee)^\vee \in L^1(\tilde{G}\backslash H)$ et

$$\Phi_f^\vee(\chi) = \vartheta^{-1} \int_{\tilde{G}\backslash H} (\Phi_f^\vee)^\vee(h)\chi(h)\,\frac{dh}{d\tilde{g}} \qquad (\chi \in \epsilon)$$

avec $\vartheta = \mathrm{vol}(\tilde{G}\backslash H, dh/d\tilde{g}) = s\ \mathrm{vol}(K'^{a_0}\backslash K^{a_0}, dh/d\tilde{g}) = |\epsilon_{a_0}|c'_{a_0}c_{a_0}^{-1} = \kappa$ (4.3). En d'autres termes, on a $(\Phi_f - \Psi)^\vee = 0$ avec $\Psi(h) = \kappa^{-1}(\Phi_f^\vee)^\vee(h^{-1})$ $(h \in \tilde{G}\backslash H)$, ce qui implique (voir [Rudin 1962, 1.7.3/b]) que $\Phi_f(h) = \kappa^{-1}(\Phi_f^\vee)^\vee(h^{-1})$ pour presque tout $h \in \tilde{G}\backslash H$. Puisque $\mathrm{Supp}(\Phi_f^\vee) \subset \epsilon_{b_1}$, on a

$$(\Phi_f^\vee)^\vee \in C_0(\tilde{G}K^{b_1}\backslash H) = C(\tilde{G}K^{b_1}\backslash H).$$

Précisément, pour $h_1 \in \tilde{G}\backslash H$, on a

$$\begin{aligned}
(\Phi_f^\vee)^\vee(h_1) &= \sum_{\chi\in\epsilon_{b_1}} \int_{\tilde{G}\backslash H} \Phi_f(hh_1^{-1})\chi(h^{-1})\,\frac{dh}{d\tilde{g}} \\
&= |\epsilon_{b_1}| \int_{\tilde{G}\backslash\tilde{G}K^{b_1}} \Phi_f(hh_1^{-1})\,\frac{dh}{d\tilde{g}} \\
&= |\epsilon_{b_1}| \int_{\tilde{G}K^{b_1}} f(hh_1^{-1})\lambda_\pi(hh_1^{-1})\,dh \\
&= |\epsilon_{b_1}|c_{b_1}'^{-1} \iint_{\tilde{G}\times K^{b_1}} f(\tilde{g}kh_1^{-1})\lambda_\pi(\tilde{g}kh_1^{-1})\,d\tilde{g}\,dk.
\end{aligned}$$

Puisque $|\epsilon_{b_1}|c'^{-1}_{b_1} = \kappa\, c_{b_1}^{-1}$ (4.3), pour $h_1 \in \tilde{G}\backslash\tilde{G}K^{b_1}$, on a

$$(\Phi_f^\vee)^\vee(h_1) = \kappa\, c_{b_1}^{-1}\iint_{\tilde{G}\times K^{b_1}} f(\tilde{g})\lambda_\pi(\tilde{g}k)\, d\tilde{g}\, dk = \kappa\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle.$$

Comme $\mathrm{Supp}(f|_{\tilde{G}}) \subset G'$, on obtient que

$$\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \kappa^{-1}(\Phi_f^\vee)^\vee(h_1) = \int_{G'} f'(g')\lambda_\pi(g'h_1)\, dg'$$

pour presque tout $h_1 \in K^{b_1}$. □

Proposition 4.9. *Supposons la distribution Θ_π localement constante sur une partie ouverte $\mathcal{Y} \subset H$ telle que $\mathcal{Y} \cap G' \neq \varnothing$. Alors la distribution $\Theta_{\pi'}$ est localement constante sur $\mathcal{Y} \cap G'$, et l'on a $\Theta_{\pi'}(g') = \Theta_\pi(g')$ pour tout $g' \in \mathcal{Y} \cap G'$.*

Démonstration. Posons $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \cap G'$; c'est une partie ouverte (non vide) de G'. Soit $f' \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathcal{Y}')$, et soit $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}$ tel que $f \in C_{\mathrm{c}}(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1})$. Posons $b_1 = b(\pi, a_1)$. Puisque $\mathrm{Supp}(f')$ est une partie compacte de $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$, il existe un entier $a \geq b_1$ tel que $K^a\, \mathrm{Supp}(f')K^a \subset \mathcal{Y}$ et $\Theta_\pi|_{K^a\,\mathrm{Supp}(f')K^a}$ est une fonction K^a-biinvariante. On a donc $\Theta_\pi(g') = \Theta_{\pi,a}(g')$ pour tout $g' \in \mathrm{Supp}(f')$. On conclut grâce à 4.7. □

Soit Z le centre de H, et soit $\omega_\pi \in \epsilon(Z)$ le *caractère central* de π défini (lemme de Schur) par $\pi(z) = \omega_\pi(z)\cdot \mathrm{Id}_W$ ($z \in Z$). Posons $Z^a = Z \cap K^a$ ($a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), et notons a_π le plus petit entier $a \geq 0$ tel que $\omega_\pi|_{Z^a} = 1$.

Remarque 4.10. Supposons la distribution Θ_π localement intégrable sur H, et choisissons une fonction $\lambda_\pi : H \to \mathbb{C}$ localement intégrable par rapport à dh telle que $\Theta_\pi = \lambda_\pi\, dh$. Soient $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$ et $z \in Z$. Notons $f^z \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$ la fonction définie par $f^z(h) = f(hz^{-1})$ ($h \in H$). On a donc $\langle f^z, \Theta_\pi\rangle = \int_H f(h)\lambda_\pi(hz)\, dh$. Par ailleurs, on a

$$\langle f^z, \Theta_\pi\rangle = \mathrm{trace}\ \pi(f^z) = \omega_\pi(z)\,\mathrm{trace}\ \pi(f) = \omega_\pi(z)\langle f, \Theta_\pi\rangle.$$

Puisque l'égalité ci-dessus est vraie pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$, on obtient que $\lambda_\pi(hz) = \omega_\pi(z)\lambda_\pi(h)$ *pour presque tout* $h \in H$.

Remarque 4.11. Supposons la distribution Θ_π localement constante sur une partie ouverte $\mathcal{Y} \subset H$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a clairement $\Theta_{\pi,a}(hz) = \omega_\pi(z)\Theta_{\pi,a}(h)$ ($h \in H$, $z \in Z$). On en déduit que la distribution Θ_π est localement constante sur $Z\mathcal{Y}$, et que $\Theta_\pi(hz) = \omega_\pi(z)\Theta_\pi(h)$ *pour tous* $h \in \mathcal{Y}$ *et* $z \in Z$.

On dit que la projection canonique $H \xrightarrow{p} \tilde{G}\backslash H$ est *scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert* $U \subset \tilde{G}\backslash H$, s'il existe un morphisme de groupes topologiques (i.e., une application continue qui est un homomorphisme de groupes) $\sigma : U \to H$ tel que $p \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. Puisque $\tilde{G} = CG'$ (produit direct) et $C \subset H$ est discret, la flèche p est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de $\tilde{G}\backslash H$ si et seulement si la projection canonique $H \to G'\backslash H$ est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de $G'\backslash H$.

Thórème 4.12. *Supposons la distribution Θ_π localement intégrable sur H. Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée*:

(i) $\mathrm{vol}(G'Z, dh) \neq \varnothing$ *et la distribution Θ_π est localement constante sur une partie ouverte $\mathcal{Y} \subset H$ telle que* $\mathrm{vol}(G' \smallsetminus (\mathcal{Y} \cap G'), dg') = 0$,

(ii) *la projection canonique $H \to G'\backslash H$ est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de $G'\backslash H$,*

alors la distribution $\Theta_{\pi'}$ est localement intégrable sur G'.

Démonstration. Choisissons une fonction $\lambda_\pi : H \to \mathbb{C}$ localement intégrable par rapport à dh telle que $\Theta_\pi = \lambda_\pi dh$.

Supposons vérifiée la condition (i). Soit $f' \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G')$, et soit $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}$ tel que

$$f' \in C_{\mathrm{c}}(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1}).$$

Posons $b_1 = b(\pi, a_1)$ et $c_1 = \max\{b_1, a_\pi\}$. On a $\mathrm{vol}(K'^{b_1}Z^{c_1}, dh) \neq 0$. Puisque $K'^{b_1}Z^{c_1}$ est contenu dans K^{b_1} et que $f' \in C_{\mathrm{c}}(G'/K'^{b_1})$, d'après la proposition 4.8, il existe un $z \in Z^{c_1}$ tel que $\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \int_{G'} f'(g')\lambda_\pi(g'z)\, dg'$ (intégrale absolument convergente). D'après la remarque 4.11, pour tout $h \in \mathcal{Y}$, on a $\lambda_\pi(hz) = \lambda_\pi(h)$. Comme $\mathcal{Y} \cap G'$ est dense dans G', on obtient que $\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \int_{G'} f'(g')\lambda_\pi(g')\, dg'$ (intégrale absolument convergente). Cette égalité étant vérifiée pour toute fonction $f' \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G')$, la distribution $\Theta_{\pi'}$ est localement intégrable sur G'.

Supposons maintenant vérifiée la condition (ii) ; i.e., supposons qu'il existe un sous-groupe ouvert $U \subset \tilde{G}\backslash H$ et un morphisme de groupes topologiques $\sigma : U \to H$ tel que $p \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. Quitte à remplacer U par un sous-groupe plus petit, on peut supposer que $\sigma(U) \subset K$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on pose $K_\sigma^a = K^a\sigma(U)$ (c'est un sous-groupe ouvert de K), $e_{a,\sigma} = \mathrm{vol}(K_\sigma^a, dk)^{-1}\mathbf{1}_{K_\sigma^a} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)$, et l'on note $\Theta_{\pi,a,\sigma} : H \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\Theta_{\pi,a,\sigma}(h) = \mathrm{trace}(\pi(e_{a,\sigma})\pi(h)\pi(e_{a,\sigma}))$.

Soit a_U le plus petit entier $a \geq 0$ tel que $p(K^a) \subset U$. Posons $a_0^* = \max\{a_0, a_U\}$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq a_0^*}$, on a $K_\sigma^a = K'^a\sigma(U)$ (produit semidirect), et la restriction de p à K_σ^a induit une identification canonique $K'^a\backslash K_\sigma^a = U$. Soit $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq a_0^*}$, et soit $b_1^* = b_1(\pi, a_1, \sigma)$ le plus petit entier $b \geq a_1$ tel que $\{\chi \in \epsilon : W^{K'^{a_1}}(\chi|_U^{-1}) \neq 0\} \subset \epsilon_b$. D'après la démonstration de 4.7, pour $f' \in C_{\mathrm{c}}^\infty(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1})$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq b_1^*}$, on a $\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \int_{G'} f'(g')\Theta_{\pi,a,\sigma}(g')\, dg'$.

Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, d'après le début de la démonstration de la proposition 4.8, on a

$$\Theta_{\pi,a,\sigma}(h) = \mathrm{vol}(K_\sigma^a, dk)^{-1} \int_{K_\sigma^a} \lambda_\pi(hk)\, dk \qquad (h \in H).$$

Notons du la mesure de Haar sur U déduite de $dh/d\tilde{g}$ par restriction. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq a_0^*}$ et $h \in H$, la fonction $K'^a \times U \to \mathbb{C}$, $(k', u) \mapsto \lambda_\pi(hk'\sigma(u))$ est intégrable par rapport à $dk'\,du$, et l'on a $\Theta_{\pi,a,\sigma}(h) = c_a'^{-1}c_U^{-1}\iint_{K'^a\times U}\lambda_\pi(hk'\sigma(u))dk'\,du$ avec $c_U = \mathrm{vol}(U, du)$. On en déduit (théorème de Fubini) que pour presque tout $g' \in G'$, la fonction $U \to \mathbb{C}$, $u \mapsto \lambda_\pi(g'\sigma(u))$ est intégrable par rapport à du. Notons $\lambda_{\pi,\sigma} : G' \to \mathbb{C}$ la fonction définie presque partout par

$$\lambda_{\pi,\sigma}(g') = c_U^{-1}\int_U \lambda_\pi(g'\sigma(u))\,du.$$

Soit $f' \in C_c^\infty(G')$. Choisissons un $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq a_0^*}$ tel que $f' \in C_c^\infty(K'^{a_1}\backslash G'/K'^{a_1})$ et posons $b_1^* = b(\pi, a, \sigma)$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq b_1^*}$, on a

$$\begin{aligned}\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle &= \int_{G'} f'(g')\Theta_{\pi,a,\sigma}(g')\,dg' \\ &= c_a'^{-1}c_U^{-1}\int_{G'} f'(g')\left(\iint_{K'^a\times U}\lambda_\pi(g'k'\sigma(u))\,dk'\,du\right)dg'.\end{aligned}$$

La fonction $G' \times K'^a \times U \to \mathbb{C}$, $(g', k', u) \mapsto f'(g')\Theta_\pi(g'k'\sigma(u)$ est intégrable par rapport à $dg'\,dk'\,du$. On peut donc inverser les signes $\int_{G'}$ et $\int_{K'^a}$ (théorème de Fubini). Puisque $f'(g'k'^{-1}) = f'(g')$ $(g' \in G', k' \in K'^a)$, on obtient que la fonction $G' \times U \to \mathbb{C}$, $g' \mapsto f'(g')\Theta_\pi(g'\sigma(u))$ est intégrable par rapport à $dg'\,du$, et que

$$\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \int_{G'} f'(g')\lambda_{\pi,\sigma}(g')\,dg'$$

(intégrale absolument convergente). La fonction $G' \to \mathbb{C}$, $g' \mapsto \lambda_{\pi,\sigma}(g')$ est donc localement intégrable par rapport à dg', et la distribution $\Theta_{\pi'}$ est localement intégrable sur G'. $\square$

Remarque 4.13. Supposons la distribution Θ_π localement intégrable sur H. Supposons aussi que la projection canonique $H \to \tilde{G}\backslash H$ est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert U de $\tilde{G}\backslash H$. Soit $\sigma : U \to H$ un morphisme de groupes topologiques tels que $p \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. Puisque U est fermé dans le groupe compact $\tilde{G}\backslash H$, $\sigma(U)$ est un sous-groupe compact de H. Par conséquent $\sigma(U)$ est contenu dans un sous-groupe ouvert compact J de H, et quitte à remplacer K par J, on peut supposer que $\sigma(U) \subset K$. Choisissons une fonction $\lambda_\pi : H \to \mathbb{C}$ localement intégrable par rapport à dh telle que $\Theta_\pi = \lambda_\pi\,dh$. D'après la démonstration de 4.12, pour presque tout $g' \in G'$, la fonction $U \to \mathbb{C}$, $u \mapsto \lambda_\pi(g'\sigma(u))$ est intégrable par rapport à $du = (dh/d\tilde{g})|_U$; la fonction $\lambda_{\pi,\sigma} : G' \to \mathbb{C}$ définie presque partout par $\lambda_{\pi,\sigma}(g') = \Theta_{\pi'}(g') = \mathrm{vol}(U, du)^{-1}\int_U \lambda_\pi(g'u)\,du$, est localement intégrable par rapport à dg' ; et l'on a $\Theta_{\pi'} = \lambda_{\pi,\sigma}\,dg'$.

Supposons de plus que la distribution Θ_π est localement constante sur une partie ouverte $\mathfrak{Y} \subset H$ telle que $\mathfrak{Y} \cap G' \neq \varnothing$. Alors d'après la proposition 4.9, pour tout $g' \in \mathfrak{Y} \cap G'$, on a $\Theta_\pi(g') = \lambda_{\pi,\sigma}(g')$.

Corollaire 4.14. *Supposons la distribution Θ_π localement intégrable sur H, localement constante sur une partie ouverte $\mathcal{Y} \subset H$ telle que* $\mathrm{vol}(G' \smallsetminus (\mathcal{Y} \cap G'), dg') = 0$. *Si* $\mathrm{vol}(G'Z, dh) \neq 0$ *ou si la projection canonique $H \to G' \backslash H$ est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de $G' \backslash H$, alors la fonction $\Theta_\pi|_{G'}$ est localement intégrable par rapport à dg', et pour toute fonction $f' \in C_c^\infty(G')$, on a $\langle f', \Theta_{\pi'} \rangle = \int_{G'} f'(g') \Theta_\pi(g')\, dg'$.*

5. Intégrabilité locale des caractères de $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{F})$

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif connexe défini sur F, et soit $\boldsymbol{G}'$ son groupe dérivé. Soit $\boldsymbol{C}$ le tore central F-déployé maximal de $\boldsymbol{G}$, et soit $\boldsymbol{C}(\varpi)$ le sous-groupe de $\boldsymbol{C}(F) = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}^*(\boldsymbol{C}), F^\times)$ défini par $\boldsymbol{C}(\varpi) = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}^*(\boldsymbol{C}), \langle \varpi \rangle)$; où $\mathrm{X}^*(\boldsymbol{C})$ désigne le $\mathbb{Z}$-module libre formé des caractères algébriques de $\boldsymbol{C}$. Posons ${}_\varpi\boldsymbol{G}'(F) = \boldsymbol{C}(\varpi)\boldsymbol{G}'(F)$ (produit direct) ; c'est un sous-groupe fermé cocompact $\boldsymbol{G}(F)$. Remarquons que pour tout sous-groupe compact $J \subset \boldsymbol{G}(F)$, on a $J \cap \boldsymbol{C}(\varpi) = 0$. Soit $H \subset \boldsymbol{G}(F)$ un sous-groupe ouvert contenant ${}_\varpi\boldsymbol{G}'(F)$. Le triplet $(H, \boldsymbol{G}'(F), \boldsymbol{C}(\varpi))$ vérifie toutes les conditions imposées au triplet (H, G', C) dans la section 4.

Soit (π', W) une représentation complexe lisse irréductible, donc admissible, de $\boldsymbol{G}'(F)$. Notons $(\tilde{\pi}, W)$ la représentation de $\tilde{G} = {}_\varpi\boldsymbol{G}'(F)$ définie par $\tilde{\pi}(zg') = \tilde{\pi}(g')$ pour tous $z \in \boldsymbol{C}(\varpi)$ et $g' \in \boldsymbol{G}'(F)$. On sait que toute représentation complexe lisse de type fini de $\boldsymbol{G}'(F)$ est un $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}'(F)]$-module nœthérien. On en déduit que toute représentation complexe lisse de type fini de $\tilde{G}$ est un $\mathbb{C}[\tilde{G}]$-module nœthérien. On peut donc appliquer le corollaire 4.6 de [Henniart 2001] : la représentation $(\tilde{\pi}, W)$ de $\tilde{G}$ s'étend en une représentation lisse (π, W) d'un sous-groupe ouvert d'indice fini $H \subset \boldsymbol{G}(F)$. Par construction, π est admissible et irréductible. Puisque H contient $\boldsymbol{G}'(F)$, H est distingué dans $\boldsymbol{G}(F)$.

Soient dg et dg' des mesures de Haar respectivement sur $\boldsymbol{G}(F)$ et $\boldsymbol{G}'(F)$, et posons $dh = dg|_H$. Pour toute représentation complexe lisse admissible π_1 de H (resp. π'_1 de $\boldsymbol{G}'(F)$), on pose $\Theta_{\pi_1} = \mathrm{trace}(\pi_1\, dh) \in \mathfrak{D}(H)$ et $\Theta_{\pi'_1} = \mathrm{trace}(\pi'_1\, dg') \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{G}'(F))$.

Soit $\boldsymbol{G}(F)_{\mathrm{sr}}$ l'ensemble des éléments semisimples réguliers de $\boldsymbol{G}(F)$. Posons $H_{\mathrm{sr}} = \boldsymbol{G}(F)_{\mathrm{sr}} \cap H$ et $\boldsymbol{G}'(F)_{\mathrm{sr}} = \boldsymbol{G}(F)_{\mathrm{sr}} \cap \boldsymbol{G}'(F)$.

Le résultat suivant est une variante de [Harish-Chandra 1980, 4].

Proposition 5.1. *Pour toute représentation lisse irréductible π_1 de H, la distribution Θ_{π_1} est localement constante sur H_{sr}.*

Démonstration. Elle est identique à celle de [Harish-Chandra 1980]. Soient $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})$ une F-paire parabolique minimale dans $\boldsymbol{G}$, et $\mathcal{K}$ un sous-groupe compact maximal spécial de $\boldsymbol{G}(F)$ en bonne position par rapport à $(\boldsymbol{P}(F), \boldsymbol{A}(F))$; i.e. tel que $\boldsymbol{G}(F) = \mathcal{K}\boldsymbol{P}(F)$ et $\mathcal{K} \cap \boldsymbol{P}(F) = (\mathcal{K} \cap \boldsymbol{M}(F))(\mathcal{K} \cap \boldsymbol{U}(F))$ où $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{U}$ désignent respectivement le centralisateur de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{G}$ et le radical unipotent de $\boldsymbol{P}$. On a la décomposition d'Iwasawa $\boldsymbol{G}'(F) = \mathcal{K}'\boldsymbol{P}'(F)$ avec $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cap \boldsymbol{G}'(F)$ et $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{G}'$. Puisque $\boldsymbol{G}(F) = \boldsymbol{G}'(F)\boldsymbol{M}(F)$, on a aussi $\boldsymbol{G}(F) = \mathcal{K}'\boldsymbol{P}(F)$, d'où l'on déduit que

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}'(\mathcal{K} \cap \boldsymbol{P}(F)) = \mathcal{K}'(\mathcal{K} \cap \boldsymbol{M}(F))$$

et que $H = \mathcal{K}_H P_H$ avec $\mathcal{K}_H = \mathcal{K} \cap H$ et $P_H = \boldsymbol{P}(F) \cap H$.

Soit M^+ le sous-ensemble de $\boldsymbol{M}(F)$ défini comme en [Harish-Chandra 1980, 4], et soit $\Omega \subset \mathcal{K} \cap \boldsymbol{M}(F)$ un système (fini) de représentants des classes $\mathcal{K}_H \backslash \mathcal{K}$. On a la décomposition de Cartan $\boldsymbol{G}(F) = \mathcal{K}M^+\mathcal{K}$, d'où l'on déduit que $H = \mathcal{K}_H(\Omega M^+\Omega)_H\mathcal{K}_H$ avec $(\Omega M^+\Omega)_H = \Omega M^+\Omega \cap H$. Soit $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_H$ un sous-groupe ouvert distingué tel que $(V_{\pi_1})^{\mathcal{K}_0} \neq 0$ où V_{π_1} désigne l'espace de π_1. D'après [Harish-Chandra 1980, 4], il existe un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{P}_0 \subset \boldsymbol{P}(F)$, que l'on peut choisir contenu dans P_H, tel que $m^{-1}\mathcal{P}_0 m \subset \mathcal{K}_0$ pour tout $m \in M^+$. Quitte à remplacer $\mathcal{P}_0$ par $\bigcap_{x\in\Omega} x\mathcal{P}_0 x^{-1}$, on peut supposer que $m^{-1}\mathcal{P}_0 m \subset \mathcal{K}_0$ pour tout $m \in \Omega M^+\Omega$. Comme dans [Harish-Chandra 1980], on montre alors que pour $x \in H_{\mathrm{sr}}$, l'opérateur $T_x = \mathrm{vol}(\mathcal{K}_H, dh)^{-1} \int_{\mathcal{K}_H} \pi_1(hxh^{-1})\, dh$ est de rang fini, et que l'application $H_{\mathrm{sr}} \to \mathrm{End}(V_{\pi_1})$, $x \mapsto T_x$ est localement constante ; ce qui implique (voir [Harish-Chandra 1980, 4, corollary of theorem 2]) que Θ_{π_1} coïncide sur H_{sr} avec l'application localement constante $x \mapsto \mathrm{trace}(T_x)$. $\square$

D'après [Harish-Chandra 1980], la distribution $\Theta_{\pi'}$ est une fonction localement constante sur l'ensemble $\boldsymbol{G}'(F)_{\mathrm{sr}}$. D'après la proposition 4.9, on a donc le

Corollaire 5.2. *On a* $\Theta_{\pi'}|_{\boldsymbol{G}'(F)_{\mathrm{sr}}} = \Theta_\pi|_{\boldsymbol{G}'(F)_{\mathrm{sr}}}$.

Soit $\boldsymbol{Z}$ le centre de $\boldsymbol{G}$. Posons $Z_H = \boldsymbol{Z}(F) \cap H$; c'est le centre de H. Puisque H est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $\boldsymbol{G}(F)$, on a

– $\mathrm{vol}(\boldsymbol{G}'(F)Z_H, dh) \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{vol}(\boldsymbol{G}'(F)\boldsymbol{Z}(F), dg) \neq 0$,
– la projection canonique $H \to \boldsymbol{G}'(F)\backslash H$ est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de $\boldsymbol{G}'(F)\backslash H$ si et seulement si la projection canonique $\boldsymbol{G}(F) \to \boldsymbol{G}'(F)\backslash \boldsymbol{G}(F)$ est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de $\boldsymbol{G}'(F)\backslash\boldsymbol{G}(F)$.

Soit $p \geq 0$ la caractéristique de F. Si $p = 0$, ou si p est > 0 et “suffisamment grand” par rapport au rang de $\boldsymbol{G}$, alors les deux critères qui nous intéressent sont vérifiés : l'application produit $\boldsymbol{G}'(F) \times \boldsymbol{Z}(F) \to \boldsymbol{G}(F)$ est ouverte, de noyau fini ; par conséquent $\mathrm{vol}(\boldsymbol{G}'(F)\boldsymbol{Z}(F), dh) \neq 0$, et pour tout sous-groupe ouvert $U_Z \subset \boldsymbol{Z}(F)$ tel que $U_Z \cap \boldsymbol{G}'(F) = \{1\}$, la projection canonique $\boldsymbol{G}(F) \to \boldsymbol{G}'(F)\backslash\boldsymbol{G}(F)$ est scindée au-dessus de $\boldsymbol{G}'(F)\backslash\boldsymbol{G}'(F)U_Z$. Dans le cas général, il se peut que $\mathrm{vol}(\boldsymbol{G}'(F)\boldsymbol{Z}(F), dg) = 0$ (cf. par exemple la section 6), mais le second critère est toujours vérifié :

Lemme 5.3. *La projection canonique* $\boldsymbol{G}(F) \to \boldsymbol{G}'(F)\backslash\boldsymbol{G}(F)$ *est scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de* $\boldsymbol{G}'(F)\backslash\boldsymbol{G}(F)$.

Démonstration (P. Gille). Soit $1 \to \boldsymbol{T}_1 \xrightarrow{\iota} \boldsymbol{T}_2 \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{T}_3 \to 1$ une suite exacte de F-tores. Choisissons une extension galoisienne finie E/F déployant $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_3$ (alors E déploie $\boldsymbol{T}_2$), et posons $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$. Pour $i = 1, 2, 3$, on note $X_i = \mathrm{X}^*(\boldsymbol{T}_i)$ le groupe des caractères algébriques de $\boldsymbol{T}_i$. D'où une suite exacte de Γ-modules $0 \to X_3 \xrightarrow{\pi^*} X_2 \xrightarrow{\iota^*} X_1 \to 0$, laquelle définit un élément de $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_1, X_3)$. Puisque $|\Gamma| \cdot \mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_1, X_3) = 0$, la suite exacte de Γ-modules

$$1 \to X_3 \xrightarrow{\tilde\pi^*} \tilde X_2 \xrightarrow{\tilde\iota^*} X_1 \to 1$$

définie par

- $\tilde X_2 = \ker\{X_1 \times X_2 \to X_1,\ (x, y) \mapsto |\Gamma| x + \iota^*(y)\}$,
- $\tilde\pi^*(y) = (0, \pi^*(y))$ pour tout $y \in X_3$,
- $\tilde\iota^*(x, y) = x$ pour tout $(x, y) \in \tilde X_2 \subset X_1 \times X_2$,

est scindée. De plus, le diagramme de Γ-modules

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & X_3 \arrow[r, "\tilde\pi^*"] \arrow[d, equal] & \tilde X_2 \arrow[r, "\tilde\iota^*"] \arrow[d, "f^*"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mu^*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_3 \arrow[r, "\pi^*"] & X_2 \arrow[r, "\iota^*"] & X_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif ; où f^* désigne la projection sur le second facteur, et μ^* la multiplication par $|\Gamma|$. Le conoyau de f^* s'identifie naturellement (i.e., via ι^*) à un sous-groupe de $X_1/\mu^*(X_1)$; c'est donc un groupe fini. Par dualité, on obtient le diagramme commutatif exact de F-tores suivant :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \boldsymbol{T}_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mu"] & \boldsymbol{T}_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \boldsymbol{T}_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \boldsymbol{T}_1 \arrow[r, "\tilde\iota"] \arrow[d] & \tilde{\boldsymbol{T}}_2 \arrow[r, "\tilde\pi"] \arrow[d] & \boldsymbol{T}_3 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \end{tikzcd}$$

où $\tilde{\boldsymbol{T}}_2$ désigne le F-tore E-déployé ayant pour groupe des caractères le Γ-module $\tilde X_2$. Soit $\tilde s : \boldsymbol{T}_3 \to \tilde{\boldsymbol{T}}_2$ un morphisme de F-tores tel que $\tilde\pi \circ \tilde s = \mathrm{id}_{\boldsymbol{T}_3}$ (un tel $\tilde s$ existe, cf. plus haut). Puisque $\ker f$ est un F-groupe multiplicatif fini, il existe un sous-groupe ouvert $U_2 \subset \boldsymbol{T}_2(F)$ tel que f induit un homéomorphisme (pour la topologie ϖ-adique) $f' : U_2 \to f(U_2)$. Comme $f(U_2)$ est ouvert dans $\tilde{\boldsymbol{T}}_2(F)$, il existe un sous-groupe ouvert $U_3 \subset \boldsymbol{T}_3(F)$, que l'on peut supposer contenu dans $\pi(\boldsymbol{T}_2(F)) \cap \tilde\pi(\tilde{\boldsymbol{T}}_2(F))$, tel que $\tilde s(U_3) \subset f(U_2)$. Soit $s : U_3 \to \boldsymbol{T}_2(F)$ l'homomorphisme de groupes défini par $s(u) = f'^{-1} \circ \tilde s|_{U_3}$; il est continu et scinde la suite exacte $1 \to \boldsymbol{T}_1(F) \to \boldsymbol{T}_2(F) \to \pi(\boldsymbol{T}_2(F)) \to 1$ au-dessus de U_3.

Le quotient géométrique $p : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'\backslash\boldsymbol{G}$ existe sur F ; plus précisément, $\boldsymbol{G}'\backslash\boldsymbol{G}$ est un F-tore et p est un morphisme de F-groupes algébriques. Soit $\boldsymbol{T}$ un tore maximal de $\boldsymbol{G}$ défini sur F. Alors $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{G}'$ est un tore maximal de $\boldsymbol{G}'$ défini sur F, et p induit une suite exacte de F-tores $1 \to \boldsymbol{T}' \to \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{G}'\backslash\boldsymbol{G} \to 1$. D'où le lemme. □

D'après le corollaire 4.14, la proposition 5.1 et le lemme 5.3, on a :

Thórème 5.4. *Supposons la distribution Θ_π localement intégrable sur H. Alors la distribution $\Theta_{\pi'}$ est localement intégrable sur $\boldsymbol{G}'(F)$; plus précisément, la fonction $\Theta_\pi|_{\boldsymbol{G}'(F)}$ est localement intégrable par rapport à dg', et pour toute fonction $f' \in C_\mathrm{c}^\infty(\boldsymbol{G}'(F))$, on a $\langle f', \Theta_{\pi'}\rangle = \int_{\boldsymbol{G}'(F)} f'(g')\Theta_\pi(g')\,dg'$.*

6. Intégrabilité locale des caractères de $\mathrm{SL}_n(D)$

Revenons à la situation qui nous intéresse, celle des sections 1 à 3 : $G = \mathrm{Aut}_D(V)$, $G' = \ker\{\det' : G \to F^\times\}$ et $\tilde{G} = {}_{\varpi}G'$. La norme réduite $\det' : G \to F^\times$ induit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes

$$G'Z\backslash G \to (F^\times)^n\backslash F^\times \simeq (\mathfrak{o}_F^\times)^n\backslash\mathfrak{o}_F^\times \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Si p $(= \mathrm{car}(F)) = 0$, ou si $p > 0$ et $(n, p) = 1$, alors le groupe $G'Z\backslash G$ est fini et $G'Z$ est un sous-groupe ouvert de G. Si $p > 0$ et p divise n, alors $\mathrm{vol}(G'Z, dg) = 0$. Pour $x \in F^\times$, notons $\mu(x) \in G$ l'élément défini par $\mu(x)(e_1) = e_1 \cdot x$ et $\mu(x)(e_i) = e_i$ $(i = 2, \dots, n)$; on rappelle que $(e_1, \dots, e_n)$ est une D-base de V). Alors l'homomorphisme de groupes $\sigma = \mu \circ \det' : G'\backslash G \to G$ est continu et vérifie $\sigma(x) \pmod{G'} = x^d$ $(x \in G'\backslash G)$. En particulier, si $D = F$, alors la projection canonique $G \to G'\backslash G$ est non seulement scindée au-dessus d'un sous-groupe ouvert de $G'\backslash G$ (lemme 5.3), mais elle est scindée au-dessus de $G'\backslash G$.

Soient dg et dg' des mesures de Haar respectivement sur G et G' (le sous-groupe $H \subset G$ n'étant plus fixé, on abandonne les normalisations de la section 1). Pour tout sous-groupe ouvert distingué $H \subset G$, on pose $dh = dg|_H$. Pour toute représentation complexe lisse admissible π' de G', on note $\Theta_{\pi'} \in \mathfrak{D}(G')$ la distribution $\mathrm{trace}(\pi'\,dg')$.

D'après le corollaire 3.9, la proposition 4.9 et le lemme 5.3, on a :

Thórème 6.1. *Soit $\pi' \in \epsilon(G')$. la distribution $\Theta_{\pi'}$ est localement intégrable sur G', localement constante sur G'_r.*

Soit (π', W) une représentation complexe lisse irréductible de G'. Choisissons un sous-groupe ouvert $H \subset G$ contenant $\tilde{G}$ et une représentation lisse (π, W) de H prolongeant π' et telle que $\pi(\varpi^i h) = \pi(h)$ $(i \in \mathbb{Z},\ h \in H)$. D'après le lemme 5.3, on a $\Theta_{\pi'}(g') = \Theta_\pi(g')$ pour presque tout $g' \in G'$ (resp. pour tout $g' \in G'_\mathrm{r}$). En particulier, la distribution $\Theta_{\pi'}$ est H-invariante. Il suffit donc de décrire $\Theta_{\pi'}$

au voisinage des éléments G-fermés de G'. Soit x un tel élément. Reprenons les notations introduites dans le paragraphe “Réduction aux éléments G-purs de H (descente parabolique)” (page 101). D'après le corollaire 3.9, il existe un entier $m > 0$ tel que $\mathfrak{A}_\natural^m \varrho \subset \mathfrak{A}^{1/d}$ et $1 + \mathfrak{A}_\natural^m \varrho \subset H$, et des constantes $c_n(\pi')$ $(n \in \mathcal{N}_{H,\natural})$ tels que

$$\Theta_{\pi'}((1+u\varrho)x) = \sum_{n \in \mathcal{N}_{H,\natural}} c_n(\pi') \Theta_{\natural,n}^\vee(u) \tag{6.2}$$

pour tout $u \in \mathfrak{A}_\natural^m \cap B'$ tel que $1 + u\varrho \in G'$; où $\mathcal{N}_{H,\natural}$ désigne un système (fini) de représentants dans B des H_x-orbites nilpotentes de B, $\Theta_{\natural,n}^\vee$ la transformée de Fourier de la distribution $\Theta_{\natural,n} \in J_{H_x}(B)$ définie (via le choix de mesures de Haar $dh_\natural$ et $dh_{\natural,n}$ respectivement sur H_x et $(H_x)_n$) comme dans la section 3, et B' l'ensemble des éléments semisimples réguliers de B. Les fonctions $\Theta_{\natural,n}^\vee|_{B'}$ sont en général difficilement calculable (sauf si $H = G$, auquel cas l'on dispose d'une très jolie formule, [Lemaire 2004, 1.9]). On aimerait donc les remplacer par d'autres fonctions sur B', plus faciles à manipuler : les transformées de Fourier des $B^\times$-intégrales orbitales nilpotentes sur B *tordues par un caractère de* $B^\times$.

***Distributions* (G, κ)*-invariantes sur* A.** Soit $\kappa \in \epsilon((F^\times)^n \backslash F^\times)$. Pour $f \in C_c^\infty(A)$ et $g \in G$, on note ${}^{g,\kappa}f \in C_c^\infty(A)$ la fonction définie par

$${}^{g,\kappa}f(y) = \kappa \circ \det' g\, f(g^{-1}yg).$$

Une distribution $T \in \mathfrak{D}(A)$ est dite (G, κ)-invariante si $\langle {}^{g,\kappa}f, T\rangle = \langle f, T\rangle$ pour tous $f \in C_c^\infty(A)$ et $g \in G$. Soit $J_\kappa(A) \subset \mathfrak{D}(A)$ le sous-espace formé des distributions (G, κ)-invariantes. On a clairement $J_\kappa(A) \subset J_{H_\kappa}(A)$ avec $H_\kappa = \ker(\kappa \circ \det')$.

Pour chaque $\alpha \in \Pi_n$, choisissons une mesure de Haar dg_{n_α} sur G_{n_α}. Pour $\alpha \in \Pi_n$ et $\kappa \in \epsilon(\Delta_\alpha \backslash F^\times)$, on note $\Theta_\alpha^\kappa = \Theta_\alpha^\kappa(\,\cdot\,, dg_{n_\alpha}) \in J_\kappa(A)$ la distribution définie par

$$\langle f, \Theta_\alpha^\kappa\rangle = \int_{G_{n_\alpha}\backslash G} \kappa \circ \det' g\, f(g^{-1}n_\alpha g) \frac{dg}{dg_{n_\alpha}} \qquad (f \in C_c^\infty(A)); \tag{6.3}$$

d'après [Lemaire 2004, 1.10/2], l'intégrale est absolument convergente. Soient $\alpha \in \Pi_n$ et $\kappa \in \epsilon(\Delta_\alpha \backslash F^\times)$. Puisque le groupe $\Delta_\alpha \backslash F^\times$ est compact, le caractère κ se factorise à travers un quotient fini $U \backslash F^\times$ de $\Delta_\alpha \backslash F^\times$; i.e., il existe un sous-groupe ouvert $U \subset F^\times$ contenant Δ_α tel que $\kappa|_U = 1$. Soit H un sous-groupe ouvert distingué de G tel que $\Delta_H \subset U$ (un tel groupe existe). Notons dh_{n_α} la mesure de Haar sur H_{n_α} définie par

$$dh_{n_\alpha} = dg_{n_\alpha}|_{H_{n_\alpha}},$$

et $\Theta_{\alpha,\bar{x}} \in J_H(A)$ $(\bar{x} \in \Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times)$ la distribution définie grâce aux mesures dh et dh_{n_α} comme en 1.5. Pour chaque $\bar{x} \in \Delta_H \Delta_\alpha \backslash F^\times$, choisissons un élément $x \in P_\alpha$

tel que $\det'(x) \pmod{\Delta_H\Delta_\alpha} = \bar{x}$. Pour $f \in C_c^\infty(A)$, on a

$$\begin{aligned}\langle f, \Theta_\alpha^\kappa\rangle &= \sum_{\bar{x}\in\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times} \kappa\circ\det'(x)\int_{H_{n_\alpha}\backslash H} \mathrm{Ad}^* x(f)(h^{-1}n_\alpha h)\,\frac{dh}{dh_{n_\alpha}}\\ &= \sum_{\bar{x}\in\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times} \kappa(\bar{x})\langle f, \Theta_{\alpha,\bar{x}}\rangle;\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Theta_\alpha^\kappa = \sum_{\bar{x}\in\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times} \kappa(\bar{x})\Theta_{\alpha,\bar{x}}. \tag{6.4}$$

Réciproquement, pour $\bar{x} \in \Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times$, on a

$$\Theta_{\alpha,\bar{x}} = (F^\times : \Delta_H\Delta_\alpha)^{-1}\sum_{\kappa\in\epsilon(\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times)} \kappa(\bar{x})^{-1}\Theta_\alpha^\kappa. \tag{6.5}$$

Soit Π_n' l'ensemble des couples (α, κ) avec $\alpha \in \Pi_n$ et $\kappa \in \epsilon(\Delta_\alpha\backslash F^\times)$. Puisque $(F^\times)^n = \Delta_{(n)} \subset \Delta_\alpha$ ($\alpha \in \Pi_n$), le sous-groupe $\epsilon((F^\times)^n\backslash F^\times) \subset \epsilon(F^\times)$ coïncide avec l'image de l'application $\Pi_n' \to \epsilon(F^\times)$, $(\alpha,\kappa) \mapsto \kappa$. Pour $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que r divise n, notons $\varphi_{n/r,n} : \Pi_{n/r} \to \Pi_n$ l'application injective définie par

$$\varphi(\beta) = (r\beta_1 \geq \cdots \geq r\beta_{n/r} \geq 0 = \cdots = 0) \qquad (\beta = (\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_{n/r}) \in \Pi_{n/r}).$$

Pour $\alpha \in \Pi_n$, notons $s(\alpha)$ le plus grand diviseur commun des α_i ($i = 1, \ldots, n$). On a clairement $\Delta_\alpha = (F^\times)^{s(\alpha)}$ ($\alpha \in \Pi_n$). Par conséquent pour $\alpha \in \Pi_n$ et $\kappa \in \epsilon((F^\times)^n\backslash F^\times)$, on a $(\alpha,\kappa) \in \Pi_n'$ si et seulement si $r(\kappa)$ divise $s(\alpha)$; où $r(\kappa)$ désigne l'ordre de κ. On en déduit que pour $\kappa \in \epsilon((F^\times)^n\backslash F^\times)$, la fibre au-dessus de κ pour l'application $\Pi_n' \to \epsilon(F^\times)$, $(\alpha,\kappa) \mapsto \kappa$ s'identifie canoniquement à $\Pi_{n/r(\kappa)}$ via l'application $\varphi_{n/r(\kappa),n}$.

Lemme 6.6. *Les distributions Θ_α^κ ($(\alpha,\kappa) \in \Pi_n'$) sont invariantes par un sous-groupe ouvert distingué de G d'indice fini, linéairement indépendantes, et forment une base des distributions sur A à support dans $\mathfrak{N}$ invariantes par un sous-groupe ouvert distingué de G.*

Démonstration. Pour $(\alpha,\kappa) \in \Pi_n'$, la distribution Θ_α^κ est H_κ-invariante ; et H_κ est un sous-groupe ouvert distingué de G d'indice fini.

Soit $\{a_{\alpha,\kappa} : (\alpha,\kappa) \in \Pi_n'\}$ une famille de nombres complexes presque tous nuls, telle que $\sum_{(\alpha,\kappa)\in\Pi_n'} a_{\alpha,\kappa}\Theta_\alpha^\kappa = 0$. Soit H un sous-groupe ouvert distingué de G tel que $\Delta_H \subset \ker\kappa$ pour tout $(\alpha,\kappa) \in \Pi_n'$ tel que $a_{\alpha,\kappa} \neq 0$. Pour $(\alpha,\bar{x}) \in \Pi_{H,n}$, on définit comme plus haut une distribution $\Theta_{\alpha,\bar{x}} \in J_H(A)$. D'après (6.4), on a

$$0 = \sum_{(\alpha,\kappa)\in\Pi'_n} a_{\alpha,\kappa}\Theta_\alpha^\kappa = \sum_{(\alpha,\kappa)\in\Pi'_n} a_{\alpha,\kappa}\bigg(\sum_{\bar{x}\in\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times} \kappa(\bar{x})\Theta_{\alpha,\bar{x}}\bigg)$$
$$= \sum_{(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}}\bigg(\sum_{\kappa\in\epsilon(\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times)} a_{\alpha,\kappa}\kappa(\bar{x})\bigg)\Theta_{\alpha,\bar{x}}.$$

Les distributions $\Theta_{\alpha,\bar{x}}$ $((\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n})$ forment une base de $J_H(\mathfrak{N})$. Par conséquent, pour $(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$, on a

$$\sum_{\kappa\in\epsilon(\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times)} a_{\alpha,\kappa}\kappa(\bar{x}) = 0.$$

En d'autres termes, pour $\alpha\in\Pi_n$, on a $\sum_{\kappa\in\epsilon(\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times)} a_{\alpha,\kappa}\kappa = 0$; ce qui implique que $a_{\alpha,\kappa}=0$ pour tout $(\alpha,\kappa)\in\Pi'_n$. Les distributions Θ_α^κ $((\alpha,\kappa)\in\Pi'_n)$ sont donc linéairement indépendantes.

Enfin d'après (6.5), pour tout sous-groupe ouvert distingué $H\subset G$, les distributions Θ_α^κ $(\alpha\in\Pi_n,\kappa\in\epsilon(\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times))$ engendrent l'espace $J_H(\mathfrak{N})$; d'où la dernière assertion du lemme. □

On en déduit :

Proposition 6.7. *Soit $\pi'\in\epsilon(G')$. Il existe un entier $m>0$ et des constantes $c_\alpha^\kappa(\pi')$ $((\alpha,\kappa)\in\Pi'_n)$ presque toutes nulles, tels que*

$$\Theta_{\pi'}(1+u) = \sum_{(\alpha,\kappa)\in\Pi'_n} c_\alpha^\kappa(\pi')(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee(u)$$

pour tout $u\in\mathfrak{A}^m\cap A'$ tel que $1+u\in G'$.

On peut de la même manière remplacer dans la formule (6.2) les distributions $\Theta_{\natural,n}^\vee$ par des combinaisons linéaires des transformées de Fourier des $B^\times$-intégrales orbitales nilpotentes sur B tordues par un caractère de $B^\times$ (on laisse au lecteur le soin d'écrire la formule).

Remarque 6.8. Soit $H\subset G$ un sous-groupe ouvert distingué. On sait que les distributions $\Theta_{\alpha,\bar{x}}$ $((\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n})$ forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $J_H(\mathfrak{N})$. Par conséquent, pour $\nu\in\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, les formes linéaires $j^\nu(\Theta_{\alpha,\bar{x}})$ $((\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n})$ sur $C_c(A/\mathfrak{A}^\nu)$, engendrent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $j^\nu(J_H(\mathfrak{N}))$. Soit $\nu\in\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, et soit $\{f_k\}_{k=0}^s\subset C_c^\infty(A)$ un jeu de fonctions vérifiant la condition (2) du lemme 2.20. Il existe un $t\in F^\times$ tel que pour $i=0,\dots,s$, on a $(f_i)_t\in C_c(A/\mathfrak{A}^\nu)$ (voir la démonstration de la proposition 2.23 pour la définition de $(f_i)_t$). D'après la formule d'homogénéité pour $\Theta_{\alpha,\bar{x}}$ donnée au début de la démonstration du lemme 2.26, pour $i,\ j\in\{0,\dots,s\}$, on a $\langle (f_i)_t,\Theta_j\rangle = |t|^{\dim(\mathbb{O}_i)/2}\delta_{i,j}$. Par suite, les formes linéaires $j^\nu(\Theta_{\alpha,\bar{x}})$ $((\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n})$ sur $C_c(A/\mathfrak{A}^\nu)$ sont linéairement indépendantes.

Par dualité, on en déduit que les constantes $c_{\alpha,\bar{x}}(T)$ apparaissant dans la proposition 1.6 sont *uniques*. De même (cf. la démonstration du lemme 6.6), pour $\nu \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$, les formes linéaires $j^{\nu}(\Theta_{\alpha}^{\kappa})$ ($(\alpha,\kappa) \in \Pi'_n$) sur $C_{\mathrm{c}}(A/\mathfrak{A}^{\nu})$, sont linéairement indépendantes ; par conséquent les constantes $c_{\alpha}^{\kappa}(\pi')$ apparaissant dans la proposition 6.7 sont *uniques*.

Soit (π', W) une représentation complexe lisse irréductible de G'. D'après la remarque 6.8, le groupe

$$H_{\pi'} = \bigcap_{(\alpha,\kappa)} H_{\kappa}$$

où (α,κ) parcourt les éléments de Π'_n tels que $c_{\alpha}^{\kappa}(\pi') \neq 0$, est bien défini. Et si H est un sous-groupe ouvert d'indice fini de G, contenant ${}_{\varpi}G'$ et tel que π' s'étende en une représentation lisse (π, W) de H, alors on a nécessairement l'inclusion $H \subset H_{\pi'}$.

7. Application : intégrabilité locale des caractères tordus des représentations κ-stables de $\mathrm{GL}_n(D)$.

Soit $\kappa \in \epsilon((F^{\times})^n \backslash F^{\times})$. Une distribution $T \in \mathfrak{D}(G)$ est dite (G,κ)-invariante si $\langle {}^{g,\kappa}f, T\rangle = \langle f, T\rangle$ pour tous $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G)$ et $g \in G$. Soit $J_{\kappa}(G) \subset \mathfrak{D}(G)$ le sous-espace formé des distributions (G,κ)-invariantes. On a clairement $J_{\kappa}(G) \subset J_{H_{\kappa}}(G)$ avec (rappel) $H_{\kappa} = \ker(\kappa \circ \det')$.

On rappelle qu'une représentation complexe lisse π de G est dite *κ-stable* si $\kappa\pi \simeq \pi$ avec $\kappa\pi = (\kappa \circ \det') \otimes \pi$. Soit $\tilde{\epsilon}_{\kappa}(G)$ un système de représentants des classes d'équivalence de représentations complexes lisses irréductibles κ-stables de G. Pour $\pi \in \tilde{\epsilon}_{\kappa}(G)$, on choisit un automorphisme non nul A_{π}^{κ} de l'espace V_{π} de π tel que $\pi(g) \circ A_{\pi}^{\kappa} = A_{\pi}^{\kappa} \circ (\kappa\pi)(g)$ ($g \in G$), et l'on note $\Theta_{\pi}^{\kappa} = \mathrm{trace}(\pi\, dg \circ A_{\pi}^{\kappa}) \in J_{\kappa}(G)$ la distribution définie par $\langle f, \Theta_{\pi,\kappa}\rangle = \mathrm{trace}(\pi(f\,dg) \circ A_{\pi}^{\kappa})$. D'après le lemme de Schur, A_{π}^{κ} est unique à multiplication près par une constante complexe non nulle. Une représentation complexe lisse ρ de $H = H_{\kappa}$ est dite *régulière* si pour tout $g \in G \smallsetminus H$, on a $\rho^g \not\simeq \rho$ avec $\rho^g(h) = \rho(ghg^{-1})$ ($h \in H$). Notons $\epsilon'(H) \subset \epsilon(H)$ le sous-ensemble formé des classes de représentations régulières.

D'après [Kazhdan 1984, section 2, lemma 2.1], l'application $\rho \mapsto \mathrm{ind}_H^G \rho$ induit une bijection entre

- l'ensemble des G-orbites dans $\epsilon'(H)$,
- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes lisses irréductibles κ-stables de G.

De plus, si $\pi \in \tilde{\epsilon}_{\kappa}(G)$ et si ρ est une représentation complexe lisse régulière de H telle que $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G \rho$, alors il existe une constante complexe $c = c_{\pi}(\rho) \neq 0$ (dépendant du choix de l'opérateur d'entrelacement A_{π}^{κ}) telle que pour toute fonction

$f \in C_c^\infty(G)$, on a la formule

$$\langle f, \Theta_\pi^\kappa \rangle = c \sum_{g \in H \backslash G} \kappa \circ \det{}'(g) \langle f|_H, \Theta_{\rho^g} \rangle; \tag{7.1}$$

ici, les caractères Θ_{ρ^g} sont définis par $\Theta_\tau = \mathrm{trace}(\tau\, dh)$ $(\tau \in \epsilon(H))$ avec $dh = dg|_H$. Notons que la constante $c_\pi(\rho)$ ne dépend pas vraiment de ρ mais seulement de la classe d'équivalence de ρ, et que pour $g \in G$, on a $c_\pi(\rho^g) = \kappa(g) c_\pi(\rho)$.

On en obtient :

Proposition 7.2. *Soit $\pi \in \tilde{\epsilon}_\kappa(G)$. La distribution Θ_π^κ est localement intégrable sur G, localement constante sur G_{r}. De plus, on a* $\mathrm{Supp}(\Theta_\pi^\kappa) \subset H_\kappa$.

Démonstration. Soit ρ une représentation complexe lisse régulière de H telle que $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G \rho$. D'après (7.1) et le théorème 3.10, il existe une constante complexe $c = c_\pi(\rho) \neq 0$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a

$$\langle f, \Theta_\pi^\kappa \rangle = c \int_H f(h) \Bigg(\sum_{g \in H \backslash G} \kappa \circ \det{}'(g) \Theta_{\rho^g}(h) \Bigg) dh$$

(intégrale absolument convergente). On a donc $\mathrm{Supp}(\Theta_\pi^\kappa) \subset H$; et puisque les fonctions $\Theta_{\rho^g}|_{H_{\mathrm{r}}}$ $(g \in H \backslash G)$ sont localement constantes, la fonction $\Theta_\pi^\kappa|_{G_{\mathrm{r}}}$ est localement constante. □

Posons $r = r(\kappa)$, $n' = n/r(\kappa)$ et $\varphi = \varphi_{n',n} : \Pi_{n'} \to \Pi_n$.

Corollaire 7.3. *Il existe un entier $m > 0$ et des constantes $c_\beta(\pi)$ $(\beta \in \Pi_{n'})$ tels que*

$$\Theta_\pi^\kappa(1+u) = \sum_{\beta \in \Pi_{n'}} c_\beta(\pi) (\Theta_{\varphi(\beta)}^\kappa)^\vee(u)$$

pour presque tout $u \in \mathfrak{A}^m \cap A$ (resp. pour tout $u \in \mathfrak{A}^m \cap A'$).

Démonstration. D'après la démonstration de 7.2, il existe une constante $c > 0$ telle que pour presque tout $h \in H$ (resp. pour tout $h \in H_{\mathrm{r}}$), on a

$$\Theta_\pi^\kappa(h) = c \sum_{g \in H \backslash G} \kappa \circ \det{}'(g) \Theta_{\rho^g}(h).$$

Et d'après 3.8, il existe un entier $m_1 > 0$ tel que $K^{m_1} \subset H$ et des constantes $c_{\alpha,\bar{x}}(\rho)$ $((\alpha, \bar{x}) \in \Pi_{H,n})$, tels que

$$\Theta_\rho(1+u) = \sum_{(\alpha,\bar{x}) \in \Pi_{H,n}} c_{\alpha,\bar{x}}(\rho) \Theta_{\alpha,\bar{x}}^\vee(u)$$

pour tout $u \in \mathfrak{A}^{m_1} \cap A'$. Soient $g_1, \dots, g_s \in G$ tels que $G = \coprod_{i=1}^s H g_i$ (union disjointe), et soit un entier $m \geq m_1$ tel que $\mathfrak{A}^m \subset \bigcap_{i=1}^s g_i \mathfrak{A}^{m_1} g_i^{-1}$. Ainsi, pour

$i=1,\dots,s$, on a

$$\Theta_{\rho^{g_i}}(1+u)=\Theta_\rho(1+g_i^{-1}ug_i)=\sum_{(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}}c_{\alpha,\bar{x}}(\rho)\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(g_i^{-1}ug_i)$$

pour tout $u\in\mathfrak{A}^m\cap A'$. D'où l'on déduit que

$$\Theta_\pi^\kappa(1+u)=\sum_{(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}}cc_{\alpha,\bar{x}}(\rho)\left(\sum_{i=1}^s\kappa\circ\det{}'(g_i)\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(g_i^{-1}ug_i)\right)$$

pour tout $u\in\mathfrak{A}^m\cap A'$. Pour $(\alpha,\kappa')\in\Pi'_n$, on a $\Theta_\alpha^{\kappa'}\in J_{\kappa'}(A)$; par conséquent $(\Theta_\alpha^{\kappa'})^\vee\in J_{\kappa'}(A)$ et

$$(\Theta_\alpha^{\kappa'})^\vee(g^{-1}ug)=\kappa'\circ\det{}'(g)(\Theta_\alpha^{\kappa'})^\vee(u)\qquad(g\in G,\ u\in A').$$

Posons $c_{H,\alpha}=(F^\times:\Delta_H\Delta_\alpha)^{-1}$ $(\alpha\in\Pi_n)$. D'après (6.5), pour $(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$ et $i=1,\dots,s$, on a

$$\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(g_i^{-1}ug_i)=c_{H,\alpha}\sum_{\kappa'}\kappa'(\bar{x})^{-1}\kappa'\circ\det{}'(g_i)(\Theta_\alpha^{\kappa'})^\vee(u)\qquad(u\in A')$$

où κ' parcourt les éléments de $\epsilon(\Delta_H\Delta_\alpha\backslash F^\times)$. On en déduit que pour $(\alpha,\bar{x})\in\Pi_{H,n}$ et $u\in A'$, on a

$$\sum_{i=1}^s\kappa\circ\det{}'(g_i)\Theta^\vee_{\alpha,\bar{x}}(g_i^{-1}ug_i)=\begin{cases}0 & \text{si } \kappa|_{\Delta_\alpha}\neq 1,\\ sc_{H,\alpha}\kappa(\bar{x})(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee(u) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Mais pour $\alpha\in\Pi_n$, on a $\kappa|_{\Delta_\alpha}=1$ si et seulement si $r(\kappa)$ divise $s(\alpha)$; i.e., si et seulement si $\alpha\in\varphi(\Pi_{n'})$. Par ailleurs, pour $\beta\in\Pi_{n'}$, on a $\Delta_{\varphi(\beta)}\subset\Delta_H$, d'où $sc_{H,\varphi(\beta)}=1$. En définitive, on obtient que

$$\Theta_\pi^\kappa(1+u)=\sum_{\beta\in\Pi_{n'}}\left(\sum_{\bar{x}\in\Delta_H\backslash F^\times}cc_{\varphi(\beta),\bar{x}}(\rho)\kappa(\bar{x})\right)(\Theta^\kappa_{\varphi(\beta)})^\vee(u)$$

pour tout $u\in\mathfrak{A}^m\cap A'$. D'où le corollaire. □

Appendice : à propos des distributions $(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee$

Soit $(\alpha,\kappa)\in\Pi'_n$. Si $\alpha=(1,\dots,1)$, alors $\kappa=1$ et $(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee$ est une mesure de Haar sur A. On suppose donc que $\alpha\neq(1,\dots,1)$. Posons $H=H_\kappa$; on a donc $\Delta_\alpha\subset\Delta_H$. Comme dans la section 1, la P_α-orbite $\mathcal{O}_\alpha^\bullet$ se décompose en $\mathcal{O}_\alpha^\bullet=\coprod_{\bar{x}}\mathcal{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}$ où $\bar{x}$ parcourt les éléments de $\Delta_H\backslash F^\times$. Pour $u\in\mathfrak{u}_\alpha$, on note $\varphi(u)\in\Delta_H\backslash F^\times$ l'élément défini par

$$\varphi(u)=\begin{cases}1 & \text{si } u\in\mathfrak{u}_\alpha\smallsetminus\mathcal{O}_\alpha^\bullet,\\ \bar{x} & \text{si } u\in\mathcal{O}^\bullet_{\alpha,\bar{x}}.\end{cases}$$

Pour $f \in C_c^\infty(A)$, notons $\tilde{f} \in C_c^\infty(A)$ la fonction $g \mapsto \int_{K_H} f(k^{-1}gk)\,dk$ où dk désigne la mesure de Haar normalisée sur K_H. D'après (6.4) et 1.5, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(A)$, on a

$$\begin{aligned}\langle f, \Theta_\alpha^\kappa\rangle &= c \sum_{\bar{x}\in\Delta_H\backslash F^\times} \kappa(\bar{x}) \iint_{K_H\times\overline{\mathcal{O}_{\alpha,\bar{x}}^\bullet}} f(k^{-1}uk)\,dk\,du \\ &= c\int_{\mathfrak{u}_\alpha} \kappa\circ\varphi(u)\tilde{f}(u)\,du.\end{aligned}$$

Par construction, on a

$$\kappa\circ\varphi(p^{-1}up) = \kappa\circ\det{}'(p)\kappa\circ\varphi(u) \qquad (u\in\mathfrak{u}_\alpha,\ p\in P_\alpha). \tag{A.1}$$

Posons $n' = n/r(\kappa)$, et soit $\beta = \varphi_{n',n}^{-1}(\alpha) \in \Pi_{n'}$. La partition duale de α,

$$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1 \geq \cdots \geq \hat{\alpha}_n) \in \Pi_n,$$

est donnée par

$$\hat{\alpha} = (\hat{\beta}_1 = \cdots = \hat{\beta}_1 \geq \hat{\beta}_2 = \cdots = \hat{\beta}_2 \geq \cdots \geq \hat{\beta}_{n'} = \cdots = \hat{\beta}_{n'})$$

où chaque $\hat{\beta}_i$ apparaît $r(\kappa)$ fois. On a $\hat{\alpha}_i = \dim_D(V_\alpha^i) - \dim_D(V_\alpha^{i-1})$ $(i = 1,\dots,r_\alpha)$; en particulier, on a $\hat{\alpha}_{r_\alpha+1} = \cdots = \hat{\alpha}_n = 0$. Pour $i = 1,\dots,r_\alpha$, notons W_α^i l'unique sous-D-espace vectoriel de V_α^i de la forme $W_\alpha^i = \bigoplus_{j\in I(\alpha,i)} W^j$ pour un sous-ensemble fini $I(\alpha,i)\subset\{1,\dots,n\}$, tel que $V_\alpha^i = V_\alpha^{i-1}\oplus W_\alpha^i$ (pour la définition des W^j, voir le paragraphe “Descente parabolique”, page 83) ; on a donc $\dim_D(W_\alpha^i) = \hat{\beta}_i$. Pour $i,\ j\in\{1,\dots,r_\alpha\}$, $A_\alpha^{i,j} = \mathrm{End}_D(W_\alpha^j, W_\alpha^i)$ s'identifie canoniquement à un sous-F-espace vectoriel de A. On a les décompositions

$$\mathfrak{m}_\alpha = \bigoplus_{i=1}^{r_\alpha} A_\alpha^{i,i}, \quad \mathfrak{u}_\alpha = \bigoplus_{i<j} A_\alpha^{i,j}, \quad \bar{\mathfrak{u}}_\alpha = \bigoplus_{i>j} A_\alpha^{i,j}.$$

Écrivons $n_\alpha = \bigoplus_{i<j} n_\alpha^{i,j}$ avec $n_\alpha^{i,j}\in\mathfrak{u}_\alpha^{i,j}$. Si $i\in\{1,\dots,r_\alpha-1\}$ est un indice tel que $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{i+1}$, on a (voir [Lemaire 2004, 1.4/5]) $n_\alpha^{i,i+1}\in\mathrm{Isom}_D(W_\alpha^{i+1}, W_\alpha^i)$; et pour $x\in A_\alpha^{i,i+1}$, on note $\det'(x)$ le déterminant réduit de x défini via $n_\alpha^{i,i+1}$: $\det'(x) = \det'(x\circ(n_\alpha^{i,i+1})^{-1})$. Comme dans [Hales 1993, 3.6], on définit comme suit une fonction $b_\kappa : \mathcal{O}_\alpha^\bullet\ (= \mathcal{O}_{P_\alpha}(n_\alpha)) \to \mathbb{C}$: pour $u = \bigoplus_{i<j} u_{i,j}\in\mathcal{O}_\alpha^\bullet$ avec $u_{i,j}\in A_\alpha^{i,j}$, on pose

$$b_\kappa(u) = \prod_{i=1}^{r_\alpha-1} \kappa^{-i}(\det{}'(u_{i,i+1}))$$

avec (convention d'écriture) $\kappa^{-i}(\det'(u_{i,i+1})) = 1$ si $\hat{\alpha}_i \neq \hat{\alpha}_{i+1}$; notons que si $\hat{\alpha}_i \neq \hat{\alpha}_{i+1}$, alors $r(\kappa)$ divise i et $\kappa^{-i} = 1$. Comme dans [Hales 1993, 3.6], on montre que

$$\text{(A.2)}\qquad b_\kappa(p^{-1}up)=\kappa\circ\det{}'(p)b_\kappa(u)\qquad (u\in\mathfrak{u}_\alpha,\ p\in P_\alpha).$$

Puisque $\mathcal{O}_\alpha^\bullet=\mathcal{O}_{P_\alpha}(n_\alpha)$ est dense dans $\mathfrak{u}_\alpha$, d'après (A.1) et (A.2), il existe une constante complexe $c'\neq 0$ telle que $\kappa\circ\varphi(u)=c'b_\kappa(u)$ pour presque tout $u\in\mathfrak{u}_\alpha$. Comme $\kappa\circ\varphi(n_\alpha)=1=b_\kappa(n_\alpha)$, on a $c'=1$. D'où la formule

$$\text{(A.3)}\qquad \langle f,\Theta_\alpha^\kappa\rangle=c\int_{\mathfrak{u}_\alpha} b_\kappa(u)\tilde{f}(u)\,du\qquad (f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)).$$

D'après la proposition 2.7, on a donc

$$\text{(A.4)}\qquad (\Theta_\alpha^\kappa)^\vee(y)=c\int_{\mathfrak{u}_\alpha} b_\kappa(u)\overline{\Psi}{}_{A,y}^{K_H}(u)\,du\qquad (y\in A').$$

Notons que dans le cas très particulier où $D=F$ avec $\mathrm{car}(F)=0$, et n est un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de F, Assem [1994] a calculé explicitement cette fonction $(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee|_{A'}$ (puisque n est premier, on a nécessairement $\alpha=(n)$).

La distribution $(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee$ est localement intégrable sur A (proposition 2.1). On a donc

$$\langle f,(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee\rangle=\int_{A'} f(g)(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee(g)\,d_Ag=\int_{A'}\tilde{f}(g)(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee(g)\,d_Ag\qquad (f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(A))$$

(intégrales absolument convergentes). Puisque pour tout sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}\subset H$, la restriction $\overline{\Psi}{}_{A,y}^{\mathcal{K}}|_{\mathfrak{u}_\alpha}$ est à support compact (corollaire 2.6), on en déduit que

$$\text{(A.5)}\quad \langle f,(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee\rangle=c\int_{A'}\tilde{f}(y)\left(\int_{\mathfrak{u}_\alpha} b_\kappa(u)\overline{\Psi}{}_{A,y}^{\mathcal{K}}(u)\,du\right)d_Ay\qquad (f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(A))$$

pour tout sous-groupe ouvert $\mathcal{K}\subset K_H$.

Remarque A.6. Posons $\mathfrak{v}_\alpha=\bigoplus_{i=1}^{r_\alpha-1}A_\alpha^{i,i+1}$ et $\mathfrak{u}_\alpha^1=\bigoplus_{i<j-1}^{r_\alpha-1}A_\alpha^{i,j}$ $(=[\mathfrak{u}_\alpha,\mathfrak{u}_\alpha])$; on a donc $\mathfrak{u}_\alpha=\mathfrak{v}_\alpha\oplus\mathfrak{u}_\alpha^1$. Soient dv et du^1 les mesures de Haar respectivement sur $\mathfrak{v}_\alpha$ et $\mathfrak{u}_\alpha^1$ normalisées par $\mathfrak{A}$. De même, posons $\bar{\mathfrak{v}}_\alpha=\bigoplus_{i=1}^{r_\alpha-1}A_\alpha^{i+1,i}$ et $\bar{\mathfrak{u}}_\alpha^1=\bigoplus_{i>j+1}^{r_\alpha-1}A_\alpha^{i,j}$; et soient $d\bar{v}$ et $d\bar{u}^1$ les mesures de Haar respectivement sur $\bar{\mathfrak{v}}_\alpha$ et $\bar{\mathfrak{u}}_\alpha^1$ normalisées par $\mathfrak{A}$. Enfin, posons $\mu_\alpha^1=\mathrm{vol}(\mathfrak{u}_\alpha^1\cap\mathfrak{A}^{1/d},du^1)$.

Soit $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(A)$, et choisissons un $\nu\in\frac{1}{d}\mathbb{Z}$ tel que $f\in C_{\mathrm{c}}(A/\mathfrak{A}^\nu)$. Puisque K_H normalise $\mathfrak{A}$, on a $\tilde{f}\in C_{\mathrm{c}}(A/\mathfrak{A}^\nu)$. Écrivons

$$\tilde{f}=\sum_{i=1}^r\tilde{f}(y_i)\,\mathbf{1}_{y_i+\mathfrak{A}^\nu}.$$

D'après (A.3), on a

$$\begin{aligned}\langle f, (\Theta_\alpha^\kappa)^\vee\rangle &= c\sum_{i=1}^{r}\tilde f(y_i)\int_{\mathfrak{u}_\alpha} b_\kappa(u)\overline{\Psi_A(uy_i)}\left(\int_{\mathfrak{A}^\nu}\overline{\Psi_A(ug)}\,d_Ag\right)du\\ &= c\,\mathrm{vol}(\mathfrak{A}^\nu, d_Ag)\sum_{i=1}^{r}\tilde f(y_i)\int_{\mathfrak{u}_\alpha\cap\mathfrak{A}^{(1/d)-\nu}} b_\kappa(u)\overline{\Psi_A(uy_i)}\,du\\ &= c\int_A \tilde f(g)\left(\int_{\mathfrak{u}_\alpha\cap\mathfrak{A}^{(1/d)-\nu}} b_\kappa(u)\overline{\Psi_A(ug)}\mathrm{du}\right)d_Ag.\end{aligned}$$

Pour $\mu\in\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, notons $\Phi_\kappa^\mu : A/(\mathfrak{p}_\alpha+\mathfrak{A}^\nu)\to\mathbb{C}$ et $\Psi_\kappa^\mu : A/(\bar{\mathfrak{u}}_\alpha^1+\mathfrak{p}_\alpha+\mathfrak{A}^\nu)\to\mathbb{C}$ les fonctions définies par

$$\Phi_\kappa^\mu(g)=\int_{\mathfrak{u}_\alpha\cap\mathfrak{A}^{(1/d)-\mu}} b_\kappa(u)\overline{\Psi_A(ug)}\,du,\qquad \Psi_\kappa^\mu(g)=\int_{\mathfrak{v}_\alpha\cap\mathfrak{A}^{(1/d)-\mu}} b_\kappa(v)\overline{\Psi_A(vg)}\,dv.$$

Pour $\mu\in\frac{1}{d}\mathbb{Z}$ et $(\bar u^1,\bar v)\in\bar{\mathfrak{u}}_\alpha^1\times\bar{\mathfrak{v}}_\alpha$, on a (calcul facile)

$$\Phi_\kappa^\mu(\bar u^1+\bar v)=\mathrm{vol}(\mathfrak{u}^1\cap\mathfrak{A}^{(1/d)-\mu}, du^1)\,\mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{u}}_\alpha^1\cap\mathfrak{A}^\mu}(\bar u^1)\Psi_\kappa^\mu(\bar v)$$

avec $\mathrm{vol}(\mathfrak{u}_\alpha^1\cap\mathfrak{A}^{(1/d)-\mu}, du^1)=\mu_\alpha^1\,\mathrm{vol}(\mathfrak{u}_\alpha^1\cap\mathfrak{A}^\mu, du^1)^{-1}$ et $\mathrm{vol}(\mathfrak{u}_\alpha^1\cap\mathfrak{A}^\mu, du^1)=\mathrm{vol}(\bar{\mathfrak{u}}_\alpha^1\cap\mathfrak{A}^\mu, d\bar u^1)$. Puisque $\langle f,\Theta_{\alpha,\kappa}^\vee\rangle=c\int_{\bar{\mathfrak{u}}_\alpha\times\mathfrak{p}_\alpha}\tilde f(\bar u+p)\Phi_\kappa^\nu(\bar u)\,d\bar u\,dp$, on en déduit que

$$\langle f, (\Theta_\alpha^\kappa)^\vee\rangle=\mu_\alpha^1 c\int_{\bar{\mathfrak{v}}_\alpha\times\mathfrak{p}_\alpha}\tilde f(\bar v+p)\Psi_\kappa^\nu(\bar v)\,d\bar v\,dp. \tag{A.7}$$

L'égalité (A.7) est vraie pour tout couple $(f,\nu)\in C_c^\infty(A)\times\frac{1}{d}\mathbb{Z}$ tel que $f\in C_c(A/\mathfrak{A}^\nu)$. En particulier, on a $\mathrm{Supp}((\Theta_\alpha^\kappa)^\vee)\subset{}^K(\bar{\mathfrak{v}}_\alpha\oplus\mathfrak{p}_\alpha)$. Pour $i=1,\dots,r_\alpha-1$ tel que $\hat\alpha_i=\hat\alpha_{i+1}$, l'application $A_\alpha^{i,i+1}\times A_\alpha^{i+1,1}\to\mathbb{C}$, $(v,\bar v)\mapsto\Psi_A(v\bar v)$ met les groupes $A_\alpha^{i,i+1}$ et $A_\alpha^{i+1,i}$ en dualité. On peut donc à partir de (A.7) obtenir une formule intégrale analogue à celle de Howe [1974, prop. 5]; i.e., remplacer la fonction $\mu_\alpha^1\Psi_\kappa^\nu$ dans (A.7) par une fonction localement intégrable sur $\bar{\mathfrak{v}}_\alpha$, disons $\bar b_\kappa$, indépendante de ν. Pour $\kappa=1$, la formule obtenue est très simple ($\bar b_1$ est la mesure de Dirac en 0) et permet d'une part de montrer l'intégrabilité locale de la distribution $\Theta_\alpha^\vee=(\Theta_\alpha^1)^\vee$, d'autre part de calculer explicitement la fonction $\Theta_\alpha^\vee|_{A'}$ [Lemaire 2004, 1.8, 1.9]. Pour $\kappa\neq1$, la situation est plus compliquée ; en particulier, il semble difficile d'obtenir à partir d'une telle formule les renseignements escomptés sur la distribution $(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee$ (resp. sur la fonction $(\Theta_\alpha^\kappa)^\vee|_{A'}$).

Remerciement

Je remercie Philippe Gille pour son aide dans la démonstration du lemme 5.3.

Références

[Assem 1994] M. Assem, "The Fourier transform and some character formulae for p-adic SL_l, l a prime", *Amer. J. Math.* **116** :6 (1994), 1433–1467. MR 96i :22037 Zbl 0837.20051

[Clozel 1987] L. Clozel, "Characters of nonconnected, reductive p-adic groups", *Canad. J. Math.* **39** :1 (1987), 149–167. MR 88i :22039 Zbl 0629.22008

[Hales 1993] T. C. Hales, "Unipotent representations and unipotent classes in $\mathrm{SL}(n)$", *Amer. J. Math.* **115** :6 (1993), 1347–1383. MR 95a :22024 Zbl 0810.22008

[Harish-Chandra 1964] Harish-Chandra, "Invariant distributions on Lie algebras", *Amer. J. Math.* **86** (1964), 271–309. MR 28 #5144 Zbl 0131.33302

[Harish-Chandra 1970] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Lecture Notes in Math **162**, Springer, Berlin, 1970. MR 54 #2889 Zbl 0202.41101

[Harish-Chandra 1978] Harish-Chandra, "Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups", pp. 281–347 dans *Lie theories and their applications* (Kingston, Ont., 1977), édité par W. Rossmann, Queen's Papers in Pure Appl. Math. **48**, Queen's Univ., Kingston, Ont., 1978. MR 58 #28313 Zbl 0433.22012

[Harish-Chandra 1980] Harish-Chandra, "A submersion principle and its applications", pp. 95–102 dans *Geometry and analysis : Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi*, Indian Acad. Sci., Bangalore, 1980. MR 82e :22032 Zbl 0485.22023

[Henniart 1984] G. Henniart, *La conjecture de Langlands locale pour* GL(3), Mém. Soc. Math. France (N.S.) **11-12**, Soc. math. de France, Paris, 1984. MR 86g :11070 Zbl 0564.12020

[Henniart 2001] G. Henniart, "Représentations des groupes réductifs p-adiques et de leurs sous-groupes distingués cocompacts", *J. Algebra* **236** :1 (2001), 236–245. MR 2001m :22036 Zbl 0980.22019

[Henniart et Herb 1995] G. Henniart et R. Herb, "Automorphic induction for $\mathrm{GL}(n)$ (over local non-Archimedean fields)", *Duke Math. J.* **78** :1 (1995), 131–192. MR 96i :22038 Zbl 0849.11092

[Henniart et Lemaire 2004a] G. Henniart et B. Lemaire, "Existence de pseudo-coefficients pour les caractères tordus des séries κ-discrètes de $\mathrm{GL}(n, F)$", prépublication, 2004.

[Henniart et Lemaire 2004b] G. Henniart et B. Lemaire, "Intégrales orbitales tordues sur $\mathrm{GL}(n, F)$ et corps locaux proches ; applications", prépublication 2004-08, Université Paris-Sud 11 (Orsay), 2004, http ://www.math.u-psud.fr/~biblio/ppo/2004/ppo2004-08.html. À paraître dans *Canad. J. Math.*

[Howe 1974] R. Howe, "The Fourier transform and germs of characters (case of Gl_n over a p-adic field)", *Math. Ann.* **208** (1974), 305–322. MR 49 #7391 Zbl 0266.43007

[Huntsinger 1997] R. C. Huntsinger, *Some aspects of invariant harmonic analysis on the Lie algebra of a reductive p-adic group*, Ph.D. thesis, University of Chicago, 1997.

[Kazhdan 1984] D. Kazhdan, "On lifting", pp. 209–249 dans *Lie group representations* (College Park, MD, 1982/1983), vol. II, édité par R. Herb et al., Lecture Notes in Math. **1041**, Springer, Berlin, 1984. MR 86h :22029 Zbl 0538.20014

[Laumon 1996] G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties, I : Geometry, counting of points and local harmonic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **41**, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. MR 98c :11045a Zbl 0837.14018

[Lemaire 1997] B. Lemaire, *Intégrales orbitales sur* $\mathrm{GL}(N, F)$ *où* F *est un corps local non archimédien*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **70**, Soc. math. de France, Paris, 1997. MR 99j :22016 Zbl 0914.22020

[Lemaire 2004] B. Lemaire, "Intégrabilité locale des caractères tordus de $\mathrm{GL}_n(D)$", *J. Reine Angew. Math.* **566** (2004), 1–39. MR 2005h :22028 Zbl 1035.22012

[Rudin 1962] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Tracts in Pure and Applied Mathematics **12**, Wiley–Interscience, New York, 1962. MR 27 #2808 Zbl 0107.09603

Received November 18, 2003. Revised November 2, 2004.

BERTRAND LEMAIRE
CNRS (UMR 8628)
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES, BÂT. 425
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE

Bertrand.Lemaire@math.u-psud.fr