Pacific Journal of Mathematics

MODULE SUPERSINGULIER, FORMULE DE GROSS–KUDLA ET POINTS RATIONNELS DE COURBES MODULAIRES

MARUSIA REBOLLEDO

Volume 234 No. 1 January 2008

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 234, No. 1, 2008

MODULE SUPERSINGULIER, FORMULE DE GROSS–KUDLA ET POINTS RATIONNELS DE COURBES MODULAIRES

MARUSIA REBOLLEDO

We show how the Gross–Kudla formula about triple product L-functions allows us to construct degree-zero elements of the supersingular module annihilated by the winding ideal. Using the method of Parent, we apply those results to the study of rational points on modular curves, determining a set of primes of analytic density $1-9/2^{10}$ for which the quotient of $X_0(p^r)$ ($r>1$) by the Atkin–Lehner operator w_{p^r} has no rational points other than the cusps and the CM points.

Introduction

Pour $N > 0$ un entier, notons $X_0(N)$ la courbe modulaire sur $\mathbb{Q}$ classifiant grossièrement les courbes elliptiques généralisées munies d'une N-isogénie. La motivation initiale de ces travaux est l'étude des points rationnels du quotient $X_0^+(p^r)$ de $X_0(p^r)$ par l'involution d'Atkin–Lehner w_{p^r} pour p un nombre premier et $r > 1$ un entier. Pour cela, nous reprenons une méthode de Parent [2005] s'inspirant des travaux de Momose [1984; 1986; 1987] et faisant appel au *module supersingulier*.

Fixons $p > 3$ un nombre premier et $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. Nous appelons *module supersingulier* le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathcal{P}$ engendré par l'ensemble fini $\mathcal{S} = \{x_0, \ldots, x_g\}$ des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. Notons $\mathcal{P}^0$ le sous-groupe de $\mathcal{P}$ constitué des éléments de degré nul. On peut munir $\mathcal{P}^0$ d'une action de l'anneau $\mathbb{T}$ engendré par les opérateurs de Hecke agissant sur l'espace vectoriel $S_2(\Gamma_0(p))$ des formes paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(p)$ (voir 1A). Notons $\mathcal{P}^0[I_e]$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}^0$ annulés par l'*idéal d'enroulement* $I_e \subset \mathbb{T}$ c'est-à-dire l'annulateur des formes primitives $f \in S_2(\Gamma_0(p))$ telles que $L(f, 1) \neq 0$. Pour $j \in \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{F}}_p)$ un invariant non supersingulier, considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \iota_j : & \mathcal{P} & \to & \bar{\mathbb{F}}_p \\ & \sum_{i=0}^g \lambda_i x_i & \mapsto & \sum_{i=0}^g \dfrac{\lambda_i}{j - j_i} \end{array} \tag{1}$$

MSC2000: primary 14G05, 11G05, 11G18; secondary 14G10, 11R52.
Mots-clefs: rational points on modular curves, supersingular module, special values of L-functions.

où, pour $i \in \{0, \ldots, g\}$, j_i est l'invariant d'une courbe elliptique $E_i \in x_i$. Parent a mis en évidence le critère suivant (voir propositions 3.1 et 3.2 de [Parent 2005]) :

(C) *Soit $p \geq 11$. Supposons que pour tout $j \in \mathbb{F}_p$ non supersingulier, il existe $x \in \mathcal{P}^0[I_e]$ tel que $\iota_j(x) \neq 0$. Alors $X_0^+(p^r)(\mathbb{Q})$ est* trivial *c'est-à-dire ne contient que des pointes et des points CM.*

Pour A un anneau et $f : M \to N$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules, on note $M_A = M \otimes A$ et on note encore $f : M_A \to N_A$ l'homomorphisme de A-modules obtenu par extension des scalaires. Soient n le numérateur de $(p-1)/12$ et $\pi^0 : \mathcal{P}_{\mathbb{Z}[1/n]} \to \mathcal{P}^0_{\mathbb{Z}[1/n]}$ la projection orthogonale (voir Section 1C). Pour $D > 0$ notons $\gamma_D \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ le D-ième élément de Gross (voir 3A). Notons $\mathrm{Disc}(p)$ l'ensemble des discriminants quadratiques imaginaires[1] premiers à p. Parent déduit de la formule de Gross–Zhang que $\gamma_D^0 := \pi^0(\gamma_D) \in \mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}}$ pour $-D \in \mathrm{Disc}(p)$. Considérons une autre famille d'éléments du module supersingulier :

$$y_m = \sum_{i=0}^{g} \left\langle T_m x_i, \frac{x_i}{w_i} \right\rangle x_i \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad y_m^0 = \pi^0(y_m) \in \mathcal{P}^0_{\mathbb{Z}[1/n]} \quad (m \geq 1) \tag{2}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est l'accouplement bilinéaire sur $\mathcal{P}$ défini en (3) et $w_i = |\mathrm{Aut}(E_i)|/2$ pour $E_i \in x_i$.

Théorème 0.1. *Pour tout entier $m \geq 1$, $y_m^0 \in \mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}}$.*

Notons $a_E = \sum_{i=0}^{g} x_i/w_i$ l'élément d'Eisenstein (voir le Section 1C). L'assertion précédente peut se déduire de la formule de Gross–Kudla ou, pour certaines valeurs de m, de la formule de Gross–Zhang et de la proposition suivante

Proposition 0.2. *On a*

$$y_m = \epsilon(m)\, a_E \ + \sum_{\substack{(s,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ 4m-s^2=dr^2>0}} \gamma_d \qquad (m \geq 1)$$

où $\epsilon(m) = 1$ si m est un carré et $\epsilon(m) = 0$ sinon.

La démonstration de la proposition 0.2 s'inspire du calcul classique qui permet d'établir la formule des traces d'Eichler (voir [Eichler 1955], [Gross 1987] et la Section 3B).

Parent [2005] montre que $\{\gamma_D^0, -D \in \mathrm{Disc}(p)\}$ engendre le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}}$. Nous montrons au Section 3B les propositions suivantes :

Proposition 0.3. *Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $(y_m^0)_{m\geq 1}$ est égal au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $(y_m^0)_{1\leq m\leq g+1}$.*

[1] On appelle ici discriminant quadratique imaginaire le discriminant d'un ordre d'un corps quadratique imaginaire. C'est donc un carré mutiplié par un discriminant fondamental.

Proposition 0.4. *Le $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$-module engendré par $\{y_m^0, m \geq 1\}$ est égal à $\mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}}$.*

Pour $-d < 0$ un discriminant fondamental, notons ε_d le caractère non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-d})/\mathbb{Q})$. Les propositions 0.2, 0.3 et 0.4 entraînent une version précise d'un théorème de non-annulation :

Corollaire 0.5. *Si f est une forme primitive de poids 2 pour $\Gamma_0(p)$ telle que $L(f, 1) \neq 0$, alors il existe $d \leq 4g + 4$ tel que $L(f \otimes \varepsilon_d, 1) \neq 0$.*

Pour $(m, p) = 1$, y_m énumère les boucles du graphe des m-isogénies étudié par Mestre et Oesterlé [$\geq$ 2008]. Cela permet de faire les calculs (Section 4B) conduisant au Théorème 0.6 suivant.

Considérons le nombre premier $p_0 = 45321935159$. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des nombres premiers p qui sont un carré modulo 3, 4 et 7 et tels que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(1) p carré modulo 5, 11, 19, 23, 43, 67, 163, non carré modulo 8 ;

(2) p carré modulo 8, 11, 19, et modulo au moins deux des nombres premiers 43, 67, 163, et vérifiant l'une des conditions suivantes

  (a) p carré modulo 5 ;

  (b) p non carré modulo 5 et 23 ;

  (c) p non carré modulo 5 et carré modulo 23, 59, 71 ;

  (d) p non carré modulo 5, 59, 71 et carré modulo 23 ;

(3) p carré modulo 5, 8, 11, 43, 67, 163, non carré modulo 19 et l'une des conditions suivantes est vérifiée :

  (a) p carré modulo 23 ;

  (b) p non carré modulo 23 et $\left(\frac{p}{31}\right)\left(\frac{p}{36319}\right)\left(\frac{p}{p_0}\right) = 1$.

(4) p carré modulo 5, 8, 19, 43, 67, 163, non carré modulo 11 et p carré modulo au moins un des nombres : 23, 797.

Théorème 0.6. *Si $p \geq 11$, $p \neq 13$ et $p \notin \mathscr{C}$, alors $X_0^+(p^r)(\mathbb{Q})$ est trivial.*

L'ensemble $\mathscr{C}$ est de densité analytique $9/2^{10}$. Parent [2005] avait obtenu un résultat analogue avec une densité de $7/2^9$. Le cas $r = 2$ de ce théorème constitue une avancée en direction du cas *normalisateur d'un Cartan déployé* d'un problème de Serre sur la torsion des courbes elliptiques. (Pour un énoncé de ce problème, se reporter à [Serre 1972; Serre 1986, p. 288].) La liste des nombres premiers $11 \leq p \leq 50000$, $p \neq 13$ dans $\mathscr{C}$ est donnée dans la Table 3 (page 182).

1. Préliminaires sur le module supersingulier

1A. ***Réalisations géométriques et opérateurs de Hecke.*** Soit $\widetilde{\mathbb{T}}$ l'anneau engendré par l'action des opérateurs de Hecke T_m, $m \geq 1$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\Gamma_0(p))$ des formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma_0(p)$. Cette action se factorise par $\mathbb{T}$ sur $\mathrm{S}_2(\Gamma_0(p))$. Soient $X_0(p)_{\mathbb{Z}}$ la normalisation de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ dans $X_0(p)$ via le morphisme composé $X_0(p) \to X_0(1) \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. La fibre $X_0(p)_{\mathbb{F}_p}$ de $X_0(p)_{\mathbb{Z}}$ en p est constituée de deux copies de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$ qui sont échangées par l'opérateur d'Atkin–Lehner w_p et se coupent transversalement. Les points doubles de $X_0(p)_{\mathbb{F}_p}$ sont en correspondance bijective avec les classes $x_0, \ldots, x_g$ de $\mathcal{S}$ et g n'est autre que le genre de $X_0(p)$. Notons $J_0(p)$ la jacobienne de $X_0(p)$ et $\widetilde{J}$ la jacobienne généralisée de $X_0(p)$ relativement aux pointes. L'anneau $\widetilde{\mathbb{T}}$ (resp. $\mathbb{T}$) est isomorphe à l'anneau engendré par les endomorphismes de $\widetilde{J}$ (resp. $J_0(p)$) provenant des correspondances de Hecke sur $X_0(p)$. Soient $J_0(p)_{\mathbb{Z}}$ et $\widetilde{J}_{\mathbb{Z}}$ les modèles de Néron respectifs de $J_0(p)$ et $\widetilde{J}$ sur $\mathbb{Z}$. Le groupe $\mathcal{P} = \mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ (resp. $\mathcal{P}^0$) s'identifie au groupe des caractères de la composante neutre de la fibre en p de $\widetilde{J}_{\mathbb{Z}}$ (resp. $J_0(p)_{\mathbb{Z}}$) (voir [Raynaud 1991] et [de Shalit 1995, 2.3]). Cela définit par transport de structure une action de $\widetilde{\mathbb{T}}$ sur $\mathcal{P}$ qui laisse stable $\mathcal{P}^0$ et se factorise par $\mathbb{T}$ sur $\mathcal{P}^0$. L'action de $\widetilde{\mathbb{T}}$ sur la classe d'isomorphisme $[E]$ d'une courbe elliptique E supersingulière sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ est donnée par $T_m([E]) = \sum_C [E/C]$ ($m \geq 1$), où C parcourt l'ensemble des sous-schémas en groupes finis d'ordre m de E (voir [Raynaud 1991] ou [Mestre et Oesterlé $\geq$ 2008, 1.2.1]). Sur la base $(x_i)_{0 \leq i \leq g}$ de $\mathcal{P}$, l'action de T_m ($m \geq 1$) est donnée par la transposée de la *matrice d'Eichler–Brandt* $B(m) = (B_{i,j}(m))_{0 \leq i,j \leq g}$ (voir [Gross 1987, sections 1 et 4]).

1B. ***Accouplement bilinéaire.*** Soit δ le dénominateur de $(p-1)/12$. Rappelons que $w_i = |\mathrm{Aut}(E_i)|/2$ ($i \in \{0, \ldots, g\}$, $E_i \in x_i$) vérifient

$$\prod_{i=0}^{g} w_i = \delta \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{g} 1/w_i = (p-1)/12.$$

Le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{P}$ est muni de l'accouplement bilinéaire non dégénéré $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{Z}$ défini par

$$\langle x_i, x_j \rangle = w_i \delta_{i,j} \qquad (0 \leq i, j \leq g) \tag{3}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Krönecker. Les opérateurs de Hecke sont auto-adjoints pour $\langle\ ,\ \rangle$. Cet accouplement induit un homomorphisme injectif de $\widetilde{\mathbb{T}}$-modules de $\mathcal{P}$ dans $\check{\mathcal{P}} = \mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \mathbb{Z})$ (sur lequel $\widetilde{\mathbb{T}}$ agit par dualité) de conoyau isomorphe à $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$ identifiant $\check{\mathcal{P}}$ au sous-$\widetilde{\mathbb{T}}$-module

$$\bigoplus_{i=0}^{g} \mathbb{Z} \frac{x_i}{w_i}$$

de $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ (voir [Gross 1987] ou [Emerton 2002, lemme 3.16]). L'accouplement canonique $\mathcal{P} \times \check{\mathcal{P}} \to \mathbb{Z}$ étend donc l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ et sera encore noté $\langle\ ,\ \rangle$. L'homomorphisme injectif de $\mathbb{T}$-modules de $\mathcal{P}^0$ dans $\check{\mathcal{P}}^0 = \mathrm{Hom}(\mathcal{P}^0, \mathbb{Z})$ induit par $\langle\ ,\ \rangle$ est de conoyau isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (*loc. cit.*). Sur $\check{\mathcal{P}}^0/\mathcal{P}^0$ qui s'identifie au groupe des composantes de la fibre en p de $J_0(p)_{\mathbb{Z}}$, l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ n'est autre que l'accouplement de monodromie (voir [Illusie 1991] ou l'appendice de [Bertolini et Darmon 1997]).

Notons $\sum_{m\geq 0} a_m(f)\, q^m$ le développement de Fourier à l'infini de $f \in \mathrm{M}_2(\Gamma_0(p))$. Considérons le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{M}$ des formes modulaires f telles que $a_0(f) \in \mathbb{Q}$ et $a_m(f) \in \mathbb{Z}$ pour $m \geq 1$ et $\mathcal{M}^0$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathcal{M}$ constitué des formes paraboliques[2]. L'action de $\widetilde{\mathbb{T}}$ sur $\mathrm{M}_2(\Gamma_0(p))$ laisse stables $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^0$ et se factorise par $\mathbb{T}$ sur $\mathcal{M}^0$. On a $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathrm{M}_2(\Gamma_0(p))$ et $\mathcal{M}^0_{\mathbb{C}} = \mathrm{S}_2(\Gamma_0(p))$. L'accouplement sur $\mathcal{M} \times \widetilde{\mathbb{T}}$ défini par $(f, T) \mapsto a_1(f \mid T)$ induit un isomorphisme de $\widetilde{\mathbb{T}}$-modules (resp. de $\mathbb{T}$-modules)

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\widetilde{\mathbb{T}}, \mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } \mathcal{M}^0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{Z}))$$

(voir [Ribet 1983, théorème 2.2 ; Emerton 2002, proposition 1.3]). Les homomorphismes de $\widetilde{\mathbb{T}}$-modules et $\mathbb{T}$-modules

$$\begin{aligned} \theta \ :\ \mathcal{P} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}} \check{\mathcal{P}} \ &\to\ \mathrm{Hom}(\widetilde{\mathbb{T}}, \mathbb{Z}) \cong \mathcal{M} \\ x \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}} y \ &\mapsto\ \tfrac{1}{2}(\deg x . \deg y) + \textstyle\sum_{m\geq 1} \langle T_m x, y\rangle\, q^m \end{aligned}$$

et

$$\theta^0 : \mathcal{P}^0 \otimes_{\mathbb{T}} \check{\mathcal{P}}^0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{Z}) \cong \mathcal{M}^0$$

qui se déduisent de l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$, sont des surjections (voir [Emerton 2002, théorème 0.10]).

1C. ***Le $\widetilde{\mathbb{T}}$-module $\mathcal{P}$.*** Les $\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ et les $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{M}^0_{\mathbb{Q}}$ sont libres de rang 1 (voir par exemple [Gross 1987] et [Miyake 1989]). Appelons *forme de Hecke* une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma_0(p)$ propre pour tous les opérateurs de Hecke et normalisée, et *forme primitive* une forme de Hecke parabolique. On note Prim l'ensemble des formes primitives. Les idempotents primitifs de $\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ sont en correspondance bijective avec les formes de Hecke et engendrent les sous-$\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}$-modules irréductibles de $\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}$. On note $\mathbf{1}_f$ l'idempotent primitif associé à une forme de Hecke f. Les opérateurs de Hecke étant autoadjoints pour $\langle\ ,\ \rangle$, le $\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}$-module $\mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ se décompose en somme directe de sous-espaces propres orthogonaux. Pour f une forme primitive, le sous-espace $\mathcal{P}^f_{\bar{\mathbb{Q}}} = \mathbf{1}_f\left(\mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}\right)$ est une $\bar{\mathbb{Q}}$-droite dont on choisit un vecteur directeur a_f. Notons $\sigma'(m)$ la somme des diviseurs de

[2]Pour $f \in \mathcal{M}$, on a en fait $\delta\, a_0(f) \in \mathbb{Z}$ (voir [Emerton 2002, proposition 1.1]). Attention, les notations diffèrent de celles adoptées dans [Emerton 2002] où $\mathcal{M}$ est noté $\mathcal{N}$.

m premiers à p. Le sous-espace propre associé à la série d'Eisenstein normalisée $E = (p-1)/24 + \sum_{m\geq 1} \sigma'(m) q^m$ est engendré par l'*élément d'Eisenstein*

$$a_E = \sum_{i=0}^{g} \frac{x_i}{w_i} \in \check{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{Z}[1/\delta]}.$$

De plus, a_E vérifie $\langle x, a_E\rangle = \deg x$ $(x \in \mathcal{P})$. Par conséquent, $\mathcal{P}^E := \mathbb{Z}.a_E$ est le $\mathbb{Z}$-module orthogonal à $\mathcal{P}^0$ pour $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{P} \times \check{\mathcal{P}} \to \mathbb{Z}$. On note

$$\begin{aligned} \pi^0 \ :\ \mathcal{P}_{\mathbb{Z}[1/n]} &\to \mathcal{P}^0_{\mathbb{Z}[1/n]} \\ x &\mapsto x - \tfrac{12}{p-1} \deg(x)\, a_E \end{aligned}$$

la projection orthogonale.

1D. ***Produits tensoriels.*** Considérons le $\widetilde{\mathbb{T}}$-module $\mathcal{P} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}} \mathcal{P}$. Les sous-espaces $\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}$-propres de $\mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ sont les $\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}$-modules $\mathcal{P}^g_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}^g_{\bar{\mathbb{Q}}}$ pour g décrivant l'ensemble des formes de Hecke et on a les décompositions en sous-espaces deux à deux orthogonaux

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} = (\mathcal{P}^E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}^E_{\mathbb{Q}}) \oplus (\mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}}) \ \text{ et } \ \mathcal{P}^0_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{T}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}^0_{\bar{\mathbb{Q}}} = \bigoplus_{g \in \mathrm{Prim}} \big(\mathcal{P}^g_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{T}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}^g_{\bar{\mathbb{Q}}}\big).$$

En effet, pour toutes formes de Hecke f, g et h, on a $\mathbf{1}_f\big(\mathcal{P}^g_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}^h_{\bar{\mathbb{Q}}}\big) \neq 0$ si et seulement si $f = g = h$. Donc si $g \neq h$, on a $\mathcal{P}^g_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}^h_{\bar{\mathbb{Q}}} = \sum_f \mathbf{1}_f\big(\mathcal{P}^g_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}^h_{\bar{\mathbb{Q}}}\big) = 0$.

Considérons à présent les $\widetilde{\mathbb{T}}^{\otimes 3}$-modules $\mathcal{P}^{\otimes 3}$, $\mathcal{M}^{\otimes 3}$, et les $\mathbb{T}^{\otimes 3}$-modules $\mathcal{P}^{0\otimes 3}$ et $\mathcal{M}^{0\otimes 3}$. Par fonctorialité des algèbres tensorielles, on déduit de l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ un accouplement[3] $\langle\ ,\ \rangle^{\otimes 3} : \mathcal{P}^{\otimes 3} \times \check{\mathcal{P}}^{\otimes 3} \to \mathbb{Z}$. De même, le produit scalaire de Petersson $(\ ,\ )$ sur $\mathcal{M}^0_{\mathbb{C}} \times \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ (normalisé comme dans [Gross 1987] (7.1)) définit le produit scalaire de Petersson $(\ ,\ )^{\otimes 3}$ sur ${\mathcal{M}^0_{\mathbb{C}}}^{\otimes 3} \times {\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}^{\otimes 3}$ (normalisé par [Gross et Kudla 1992] (11.3)).

Les $\widetilde{\mathbb{T}}^{\otimes 3}_{\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{M}^{\otimes 3}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{P}^{\otimes 3}_{\mathbb{Q}}$ et les $\mathbb{T}^{\otimes 3}_{\mathbb{Q}}$-modules ${\mathcal{M}^0_{\mathbb{Q}}}^{\otimes 3}$ et ${\mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}}}^{\otimes 3}$ sont libres de rang 1. Les opérateurs de Hecke triples de $\widetilde{\mathbb{T}}^{\otimes 3}$ sont autoadjoints pour $(\ ,\ )^{\otimes 3}$ et $\langle\ ,\ \rangle^{\otimes 3}$. Les idempotents primitifs de $\widetilde{\mathbb{T}}^{\otimes 3}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ sont de la forme $\mathbf{1}_F = \mathbf{1}_{f_1} \otimes \mathbf{1}_{f_2} \otimes \mathbf{1}_{f_3}$ pour $F = f_1 \otimes f_2 \otimes f_3$ parcourant l'ensemble des formes de Hecke triples (c'est-à-dire telles que f_1, f_2 et f_3 soient des formes de Hecke). Le $\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $\mathcal{P}^F_{\bar{\mathbb{Q}}} = \mathbf{1}_F\, \mathcal{P}^{\otimes 3}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est une $\bar{\mathbb{Q}}$-droite de vecteur directeur $A_F = a_{f_1} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} a_{f_2} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} a_{f_3}$. On a les décompositions en sous-espaces propres deux à deux orthogonaux

$$\mathcal{P}^{\otimes 3}_{\bar{\mathbb{Q}}} = \bigoplus_F \mathcal{P}^F_{\bar{\mathbb{Q}}} \quad \text{et} \quad \Big(\mathcal{P}^0_{\bar{\mathbb{Q}}}\Big)^{\otimes 3} = \bigoplus_F \mathcal{P}^F_{\bar{\mathbb{Q}}},$$

[3] donné par $\langle a_1 \otimes a_2 \otimes a_3\,,\ b_1 \otimes b_2 \otimes b_3\rangle^{\otimes 3} = \prod_{i=1}^3 \langle a_i, b_i\rangle$

la somme directe portant respectivement sur l'ensemble des formes de Hecke triples et l'ensemble des formes primitives triples. On vérifie aisément que pour toute forme de Hecke triple F, on a

$$\mathbf{1}_F\, X = \frac{\langle A_F, X\rangle^{\otimes 3}}{\langle A_F, A_F\rangle^{\otimes 3}}\, A_F \quad (X \in \mathcal{P}^{\otimes 3}_{\bar{\mathbb{Q}}}). \tag{4}$$

2. Formule de Gross–Kudla et éléments de $\mathcal{P}^0[I_e]$

Soit

$$\Delta_3 = \sum_{i=0}^{g} \frac{1}{w_i} x_i^{\otimes 3} \in \mathcal{P}^{\otimes 3}_{\mathbb{Q}}$$

l'*élément diagonal de Gross–Kudla*. Posons $s : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{P} \otimes_{\tilde{\mathbb{T}}} \mathcal{P}$ la surjection canonique,

$$\bar{\Delta}_3 = (1 \otimes_{\mathbb{Q}} s)(\Delta_3) \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \left(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{\mathbb{T}}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\right)$$

et

$$\bar{\Delta}_3^0 = (\pi^0 \otimes_{\mathbb{Q}} s)(\Delta_3) = (\pi^0 \otimes_{\mathbb{Q}} 1)(\bar{\Delta}_3) \in \mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \left(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{\mathbb{T}}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\right).$$

Gross et Kudla [1992, théorème 11.1] ont montré que pour F une forme primitive triple, on a

$$L(F, 2) = \frac{(F, F)^{\otimes 3}}{4\pi p}\, \langle \mathbf{1}_F\, \Delta_3, \mathbf{1}_F\, \Delta_3\rangle^{\otimes 3}.$$

En particulier, lorsque $F = f \otimes h \otimes h$ ($f, h \in \mathrm{Prim}$), par [Gross et Kudla 1992, (11.7)], on obtient

$$L(f, 1)L(f \otimes \mathrm{Sym}^2 h, 2) = \frac{(F, F)^{\otimes 3}}{4\pi p}\, \langle \mathbf{1}_F\, \Delta_3, \mathbf{1}_F\, \Delta_3\rangle^{\otimes 3}. \tag{5}$$

Nous allons voir que cela entraîne le

Théorème 2.1. *On a*

$$\bar{\Delta}_3^0 = \bar{\Delta}_3 - \frac{12}{p-1} a_E \otimes_{\mathbb{Q}} \left(\sum_{i=0}^{g} x_i \otimes_{\tilde{\mathbb{T}}_{\mathbb{Q}}} \frac{x_i}{w_i} \right)$$

et

$$\bar{\Delta}_3^0 \in \mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}} \otimes (\mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}}).$$

Remarque 2.2. Le $\mathbb{T}$-module $\mathcal{P}^0$ est localement libre après extension des scalaires à $\mathbb{Z}[1/2]$ (voir l'introduction de [Emerton 2002]), par conséquent il y a au pire de la 2-torsion dans $\mathcal{P}^0[I_e] \otimes (\mathcal{P}^0 \otimes_{\mathbb{T}} \mathcal{P}^0)$. Ainsi, puisque $\delta\Delta_3 \in \mathcal{P}^{\otimes 3}$, on a même $n\delta\bar{\Delta}_3^0 \in \mathcal{P}^0[I_e] \otimes (\mathcal{P}^0 \otimes_{\mathbb{T}} \mathcal{P}^0)$ à un élément de 2-torsion près.

Démonstration. On a

$$\bar{\Delta}_3^0 = \sum_{i=0}^{g} \left(x_i - \frac{12}{p-1} a_E \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \left(x_i \otimes_{\tilde{\mathbb{T}}_{\mathbb{Q}}} \frac{x_i}{w_i} \right),$$

ce qui prouve la première assertion du Théorème 2.1.

On a dans $\mathcal{P}^0_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} (\mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\widetilde{\mathbb{T}}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Q}}})$

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_3^0 &= \sum_{f,h\in\mathrm{Prim}} (\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_h)(\bar{\Delta}_3) + \sum_{f\in\mathrm{Prim}} (\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_E)(\bar{\Delta}_3)\\ &= (1\otimes s)\Big(\sum_{f,h\in\mathrm{Prim}} (\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_h \otimes \mathbf{1}_h)(\Delta_3) + \sum_{f\in\mathrm{Prim}} (\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_E \otimes \mathbf{1}_E)(\Delta_3)\Big).\end{aligned}$$

Pour tout $f \in \mathrm{Prim}$, on a (voir (4))

$$(\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_E \otimes \mathbf{1}_E)(\Delta_3) = \frac{\langle \Delta_3, a_f \otimes a_E \otimes a_E\rangle^{\otimes 3}}{\langle a_f \otimes a_E \otimes a_E, a_f \otimes a_E \otimes a_E\rangle^{\otimes 3}}\, (a_f \otimes a_E \otimes a_E).$$

Or $\langle \Delta_3, a_f \otimes a_E \otimes a_E\rangle^{\otimes 3} = \sum_{i=0}^{g} \frac{1}{w_i}\langle x_i, a_f\rangle\ \langle x_i, a_E\rangle^2 = \langle a_E, a_f\rangle\ = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_3^0 &= (1\otimes s)\Big(\sum_{f,h\in\mathrm{Prim}} (\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_h \otimes \mathbf{1}_h)(\Delta_3)\Big)\\ &= (1\otimes s)\Big(\sum_{\substack{f,h\in\mathrm{Prim}\\ L(f,1)\neq 0}} (\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_h \otimes \mathbf{1}_h)(\Delta_3) + \sum_{\substack{f,h\in\mathrm{Prim}\\ L(f,1)=0}} (\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_h \otimes \mathbf{1}_h)(\Delta_3)\Big).\end{aligned}$$

Puisque $(\ ,\ )^{\otimes 3}$ et $\langle\ ,\ \rangle^{\otimes 3}$ sont définis positifs, on déduit de (5) que lorsque $f \in \mathrm{Prim}$ est telle que $L(f,1) = 0$, alors $(\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_h \otimes \mathbf{1}_h)(\Delta_3) = 0$ ($h \in \mathrm{Prim}$). Par ailleurs, rappelons que l'idéal I_e de $\mathbb{T}$ est l'annulateur de l'ensemble des formes paraboliques f pour lesquelles $L(f,1) \neq 0$ (voir [Merel 1996]). On en déduit que, lorsque $f \in \mathrm{Prim}$ est telle que $L(f,1) \neq 0$, le vecteur propre associé a_f est dans $\mathcal{P}^0_{\bar{\mathbb{Q}}}[I_e]$ et donc $(\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{1}_h \otimes \mathbf{1}_h)(\Delta_3) \in \mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}}$ ($h \in \mathrm{Prim}$). □

On déduit immédiatement du Théorème 2.1 le corollaire suivant :

Corollaire 2.3. *Pour toute forme $\mathbb{Q}$-linéaire ϕ sur $\mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}}$, on a $(1\otimes_{\mathbb{Q}}\phi)(\bar{\Delta}_3^0) \in \mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}}$.*

Par définition de θ, on a

$$y_m = (1 \otimes (a_m \circ \theta))(\bar{\Delta}_3) \quad \text{et} \quad y_m^0 = (1 \otimes_{\mathbb{Q}} (a_m \circ \theta^0))(\bar{\Delta}_3^0). \tag{6}$$

Le Théorème 0.1 énoncé dans l'introduction se déduit alors du corollaire 2.3 appliqué à $\phi = a_m \circ \theta^0$.

Remarque 2.4. Toute forme linéaire sur $\mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}}$ s'obtient comme combinaison linéaire des formes linéaires $a_m \circ \theta^0$ ($m \geq 1$) car $\theta^0 : \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{P}^0_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{M}^0_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme. Il n'est donc pas restrictif de considérer les combinaisons linéaires d'éléments y_m^0 comme nous le faisons par la suite.

3. Les éléments y_m

3A. ***Comparaison avec les éléments de Gross.*** Soit $D > 0$. Notons $\mathbb{O}_{-D}$ l'ordre quadratique de discriminant $-D$ s'il existe et $u(-D)$ l'ordre de $\mathbb{O}_{-D}^*/\langle\pm 1\rangle$. Pour $i \in \{0, \dots, g\}$, les anneaux $R_i = \mathrm{End}\, E_i$, $i \in \{0, \dots, g\}$, sont des ordres maximaux de l'algèbre de quaternions $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{Q}$ ramifiée en p et ∞ ; on note $h_i(-D)$ le nombre de plongements optimaux de $\mathbb{O}_{-D}$ dans R_i modulo conjugaison par R_i^*. Le *D-ième élément de Gross*[4] est défini par

$$\gamma_D = \frac{1}{2u(-D)} \sum_{i=0}^{g} h_i(-D) x_i \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}[1/6]}. \tag{7}$$

On a $\gamma_D = 0$ si $-D$ n'est pas un discriminant quadratique imaginaire ou bien si p est décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ (en effet, dans ce dernier cas, $\mathbb{O}_{-D}$ ne se plonge pas dans l'algèbre de quaternions ramifiée en p et l'infini).

Démonstration de la proposition 0.2. Soit $m \geq 1$ un entier. L'opérateur T_m agissant sur x_i par la transposée de la matrice de Brandt $B(m)$, on a $y_m = \sum_{i=0}^{g} B_{i,i}(m) x_i$. Notons N la norme réduite et tr la trace sur $\mathcal{B}$. On a

$$B_{i,i}(m) = \frac{1}{2w_i} \mathrm{Card}\{b \in R_i \ ; \ N(b) = m\} = \frac{1}{2w_i} \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ s^2 \leq 4m}} \mathrm{Card}(A_i(s, m))$$

où

$$A_i(s, m) = \{b \in R_i \ ; \ N(b) = m, \mathrm{tr}(b) = s\}.$$

Posons $D = 4m - s^2$. Lorsque $D = 0$, ce qui est possible si et seulement si m est un carré, $A_i(s, m)$ n'a qu'un seul élément. Considérons maintenant le cas où $D > 0$. Les éléments de $A_i(s, m)$ sont en bijection avec les plongements de $\mathbb{O}_{-D}$ dans R_i. Pour chaque tel plongement f il existe un unique ordre $\mathbb{O}_{-d}$ contenant $\mathbb{O}_{-D}$ ($D = dr^2$ pour un certain r) tel que f s'étende en un plongement optimal de $\mathbb{O}_{-d}$ dans R_i. On a donc une partition

$$A_i(s, m) = \bigsqcup_{\substack{d \in \mathbb{N}; \exists r \in \mathbb{N}; \\ dr^2 = D}} A_i(s, m)_d$$

où les éléments de $A_i(s, m)_d \subset A_i(s, m)$ correspondent aux plongements de $\mathbb{O}_{-D}$ dans R_i qui s'étendent en un plongement optimal de $\mathbb{O}_{-d}$ dans R_i. Comme

$$\mathrm{Card}(A_i(s, m)_d) = h_i(-d) \mid R_i^\times / \mathbb{O}_{-d}^\times \mid = w_i h_i(-d)/u(-d),$$

[4]Cet élément, introduit par Gross, est noté e_D dans [Gross 1987] et [Parent 2005].

on a finalement $\mathrm{Card}(A_i(s,m)) = w_i \sum_{\substack{d\in\mathbb{N};\,\exists r\in\mathbb{N}\\ dr^2=D}} \frac{h_i(-d)}{u(-d)}$. Par conséquent, pour tout entier $m>0$, on a

$$\begin{aligned} y_m &= \sum_{4m=s^2}\sum_{i=0}^{g}\frac{x_i}{2w_i} + \sum_{i=0}^{g}\sum_{\substack{(s,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\\ \exists r>0;\ 4m-s^2=dr^2>0}}\frac{h_i(-d)}{2u(-d)}x_i \\ &= \epsilon(m)\,a_E + \sum_{\substack{(s,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\\ 4m-s^2=dr^2>0}}\sum_{i=0}^{g}\frac{h_i(-d)}{2u(-d)}x_i. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.1. Le raisonnement précédent est celui qui donne la formule d'Eichler pour la trace de T_m (voir [Eichler 1955] ou [Gross 1987]). On retrouve cette formule en identifiant les degrés de chacun des membres de l'égalité de la proposition 0.2.

Remarque 3.2. La formule de Gross [1987, corollaire 11.6] montre que pour tout entier $d<0$ premier à p, l'élément γ_d^0 est dans $\mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}}$ (voir par exemple [Parent 2005]). La proposition 0.2 donne alors une nouvelle preuve du Théorème 0.1 dans le cas particulier où m est tel que tout entier $d>0$ tel que $4m-s^2=dr^2$ soit premier à p.

À titre d'exemple, voici la décomposition de y_m comme combinaison linéaire d'éléments de Gross pour $m\le 13$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_E + 2\gamma_3 + \gamma_4,\\
y_2 &= 2\gamma_4 + 2\gamma_7 + \gamma_8,\\
y_3 &= 3\gamma_3 + 2\gamma_8 + 2\gamma_{11} + \gamma_{12},\\
y_4 &= a_E + 2\gamma_3 + \gamma_4 + 2\gamma_7 + 2\gamma_{12} + 2\gamma_{15} + \gamma_{16},\\
y_5 &= 4\gamma_4 + 2\gamma_{11} + 2\gamma_{16} + 2\gamma_{19} + \gamma_{20},\\
y_6 &= 2\gamma_8 + 2\gamma_{15} + 2\gamma_{20} + 2\gamma_{23} + \gamma_{24},\\
y_7 &= 6\gamma_3 + \gamma_7 + 2\gamma_{12} + 2\gamma_{19} + 2\gamma_{24} + 2\gamma_{27} + \gamma_{28},\\
y_8 &= 2\gamma_4 + 4\gamma_7 + \gamma_8 + 2\gamma_{16} + 2\gamma_{23} + 2\gamma_{28} + 2\gamma_{31} + \gamma_{32},\\
y_9 &= a_E + 2\gamma_3 + \gamma_4 + 2\gamma_8 + 2\gamma_{11} + 2\gamma_{20} + 2\gamma_{27} + 2\gamma_{32} + 2\gamma_{35} + \gamma_{36},\\
y_{10} &= 4\gamma_4 + 2\gamma_{15} + 2\gamma_{24} + 2\gamma_{31} + 2\gamma_{36} + 2\gamma_{39} + \gamma_{40},\\
y_{11} &= 2\gamma_7 + 2\gamma_8 + \gamma_{11} + 2\gamma_{19} + 2\gamma_{28} + 2\gamma_{35} + 2\gamma_{40} + 2\gamma_{43} + \gamma_{44},\\
y_{12} &= 3\gamma_3 + 2\gamma_8 + 2\gamma_{11} + 3\gamma_{12} + 2\gamma_{23} + 2\gamma_{32} + 2\gamma_{39} + 2\gamma_{44} + 2\gamma_{47} + \gamma_{48},\\
y_{13} &= 6\gamma_3 + 4\gamma_4 + 2\gamma_{12} + 2\gamma_{16} + 2\gamma_{27} + 2\gamma_{36} + 2\gamma_{43} + 2\gamma_{48} + 2\gamma_{51} + \gamma_{52}.
\end{aligned}$$

3B. ***Espace vectoriel et module de Hecke engendrés par ces éléments.*** Nous démontrons dans ce paragraphe les propositions 0.3 et 0.4 ainsi que le corollaire

0.5. Faisons tout d'abord quelques observations. A une forme linéaire ϕ sur $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, associons la forme modulaire $\mathbf{g}_\phi = (\phi \otimes_{\mathbb{Q}} \theta^0)(\bar{\Delta}_3^0) \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^0$. Remarquons que $\mathbf{g}_\phi$ a pour q-développement

$$\sum_{m\geq 1} \phi(y_m^0) q^m. \tag{8}$$

De plus, puisque $\phi \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \theta^0$ est un homomorphisme de $\mathbb{T}_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{T}_{\bar{\mathbb{Q}}}$-modules, on a

$$\mathbf{1}_h\, \mathbf{g}_\phi = (\phi \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \theta^0)\Big(\sum_{g\in \mathrm{Prim}} (\mathbf{1}_g \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_h)(\bar{\Delta}_3)\Big) \quad (h \in \mathrm{Prim}). \tag{9}$$

Démonstration de la proposition 0.3. Il suffit de montrer que toute forme linéaire sur l'espace vectoriel engendré par $(y_m^0)_{m\geq 1}$ et qui s'annule en $y_1^0, \ldots, y_{g+1}^0$ est nulle. Soit ϕ une telle forme linéaire. La forme différentielle ω_ϕ de $X_0(p)$ associée à $\mathbf{g}_\phi$ a pour q-développement

$$\sum_{m\geq 1} \phi(y_m^0) q^m \frac{dq}{q}.$$

Si $\phi(y_1^0) = 0, \ldots, \phi(y_{g+1}^0) = 0$, la forme différentielle holomorphe ω_ϕ a un zéro d'ordre g en l'infini. L'infini n'étant pas un point de Weierstrass de $X_0(p)$ (voir [Ogg 1978]), on en déduit que ω_ϕ est nulle, d'où la proposition. □

Pour démontrer la proposition 0.4 on a encore besoin de deux lemmes :

Lemme 3.3. *Soient f et h deux formes primitives. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

$$a)\ L(f,1)L(f\otimes \mathrm{Sym}^2 h, 2) = 0\ ; \qquad b)\ \mathbf{1}_h.\mathbf{g}_{\langle\,.\,,a_f\rangle} = 0.$$

Démonstration. D'après (9), on a

$$\mathbf{1}_h\, \mathbf{g}_{\langle\,.\,,a_f\rangle} = \big(\langle\,.\,,a_f\rangle \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \theta^0\big)\Big(\sum_{g\in \mathrm{Prim}} (\mathbf{1}_g \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_h)(\bar{\Delta}_3)\Big).$$

Puisque $\langle a_g, a_f\rangle = 0$ si $g \neq f$, on obtient

$$\mathbf{1}_h \mathbf{g}_{\langle\,.\,,a_f\rangle} = (\langle\,.\,,a_f\rangle \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \theta^0)(\mathbf{1}_f \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_h)(\bar{\Delta}_3).$$

Or l'application

$$\langle\,.\,,a_f\rangle \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \theta^0 : \mathcal{P}^f_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} (\mathcal{P}^0_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{T}_{\bar{\mathbb{Q}}}} \mathcal{P}^0_{\bar{\mathbb{Q}}}) \to \mathcal{M}^0_{\bar{\mathbb{Q}}}$$

est injective car θ^0 est un isomorphisme de $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$-modules libres (voir fin du Section 1A). Par conséquent $\mathbf{1}_h\ \mathbf{g}_{\langle\,.\,,a_f\rangle} = 0$ si et seulement si $(\mathbf{1}_f \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_h)(\bar{\Delta}_3) = 0$ *i.e.* si et seulement si $(\mathbf{1}_f \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_h \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_h)(\Delta_3) = 0$. D'après (5), ceci est équivalent à l'assertion a). □

Lemme 3.4. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) *le* $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$*-module* $\mathcal{Y}$ *engendré par* $\{y_m^0,\, m \geq 1\}$ *est égal à* $\mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}}$;

ii) *pour toute forme primitive* f *de poids* 2 *pour* $\Gamma_0(p)$ *telle que* $L(f,1) \neq 0$, *il existe une forme primitive* h *de poids* 2 *pour* $\Gamma_0(p)$ *telle que* $L(f \otimes \mathrm{Sym}^2 h, 2) \neq 0$.

Démonstration. Les espaces $\mathbb{T}_{\bar{\mathbb{Q}}}$-propres de $\mathcal{P}^0_{\bar{\mathbb{Q}}}$ étant des $\bar{\mathbb{Q}}$-droites, on a $\mathcal{Y} = \mathcal{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}}$ si et seulement si pour tout $f \in \mathrm{Prim}$ tel que $L(f,1) \neq 0$, il existe $m \geq 1$ tel que $\mathbf{1}_f\, y_m \neq 0$. Par ailleurs, d'après le lemme 3.3, la condition ii) du lemme est vérifiée si et seulement si pour tout $f \in \mathrm{Prim}$ tel que $L(f,1) \neq 0$, on a $\mathbf{g}_{\langle\,.\,,a_f\rangle} \neq 0$ (car il existe alors h telle que $\mathbf{1}_h \mathbf{g}_{\langle\,.\,,a_f\rangle} \neq 0$). Puisque $\mathbf{g}_{\langle\,.\,,a_f\rangle}$ a pour q-développement $\sum_{m\geq 1} \langle y_m, a_f\rangle\, q^m$ (voir (8)), on en déduit l'équivalence des assertions i) et ii). □

Démonstration de la proposition 0.4. D'après les travaux de Böcherer et Schulze-Pillot [1999] améliorés par Arakawa et Böcherer [2003, théorème 5.3], la condition ii) du lemme ci-dessus est toujours satisfaite. □

Démonstration du corollaire 0.5. Soit $f \in \mathrm{Prim}$ telle que $L(f,1) \neq 0$. D'après les propositions 0.3 et 0.4, il existe alors $1 \leq m \leq g+1$ tel que $\mathbf{1}_f\, y_m \neq 0$. Par conséquent, il existe $D \leq 4g+4$ tel que $\mathbf{1}_f\, \gamma_D \neq 0$. On a $(D,p) = 1$ car $D \leq 4g+4$. Soit $-d$ le discriminant fondamental de $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$. En vertu des *relations de norme* [Bertolini et Darmon 1996] 2.4, on a $\gamma_D \in \widetilde{\mathbb{T}}.\gamma_d$. On en déduit que $\mathbf{1}_f\, \gamma_d \neq 0$ et $L(f \otimes \varepsilon_d, 1) \neq 0$ d'après la formule de Gross [1987, corollaire 11.6] généralisée par Zhang [2001, théorème 1.3.2]. □

4. Points rationnels de courbes modulaires

4A. ***Une question théorique.*** On suppose désormais $p \geq 11$. Soit $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en p. Soit $j \in \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{F}}_p)$ non supersingulier. On étend ι_j à $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ en posant $\iota_j(1/a) = a^{-1}$. Supposons vérifiée la condition :

(H) *Pour tout* $j \in \mathbb{F}_p$ *ordinaire, il existe* $m \geq 1$ *tel que* $\iota_j(y_m^0) \neq 0$.

D'après le Théorème 0.1 et le critère (C) énoncé dans l'introduction, on a alors $X_0^+(p^r)(\mathbb{Q})$ trivial. Actuellement, on ne sait pas si pour p assez grand (par exemple $p > 37$), l'hypothèse (H) est vérifiée. Dans l'espoir d'obtenir un résultat sans les contraintes de congruence du Théorème 0.6, remarquons que l'on peut reformuler cette condition. On a $(1 \otimes \theta^0)(\bar{\Delta}_3^0) \in \mathcal{P}^0_{\mathbb{Z}[1/n]} \otimes \mathcal{M}^0$. Considérons la forme parabolique à coefficients dans $\bar{\mathbb{F}}_p$ (*i.e.* l'élément de $\bar{\mathbb{F}}_p \otimes \mathcal{M}^0$) définie par

$$\mathbf{g}_j = (\iota_j \otimes \theta^0)(\bar{\Delta}_3^0) \in \mathcal{M}^0_{\bar{\mathbb{F}}_p}. \tag{10}$$

Cette forme modulaire a pour q-développement $\sum_{m\geq 1} \iota_j(y_m^0)\, q^m$. L'hypothèse (H) est donc équivalente à :

(H′) *Pour tout $j \in \mathbb{F}_p$ ordinaire, on a $\mathbf{g}_j \neq 0$.*

4B. ***Calculs pratiques : démonstration du Théorème 0.6.*** Soit $j \in \mathbb{F}_p$ non supersingulier. On a

$$\iota_j(y_m^0) = \sum_{i=0}^{g} \frac{B_{i,i}(m)}{j - j_i} + 12\,\mathrm{tr}(B(m)) \sum_{i=0}^{g} \frac{1}{w_i(j - j_i)} \in \bar{\mathbb{F}}_p.$$

En effet,

$$y_m^0 = y_m - \frac{12}{p-1}\deg(y_m)a_E \quad \text{et} \quad \iota_j(a_E) = \sum_{i=0}^{g} \frac{1}{w_i(j - j_i)}.$$

Le membre de droite de cette dernière égalité n'étant pas facile à calculer, nous introduisons

$$y_{k,m} = \mathrm{tr}\, B(m)y_k - \mathrm{tr}\, B(k)y_m \in \mathscr{P}^0[I_e]_{\mathbb{Q}} \quad (0 < k < m)$$

et calculons $\iota_j(y_{k,m})$ pour k, m dans $\{2, 3, 5, 6, 7\}$.

Lorsque $(m, p) = 1$, l'entier $B_{i,i}(m)$ est la multiplicité de j_i comme racine du polynôme modulaire $\phi_m(X, X)$ dans $\bar{\mathbb{F}}_p$ (voir [Igusa 1959] ou [Lang 1987, 5.3 théorème 5]). Les polynômes modulaires $\phi_m(X, X)$ pour $m \in \{2, 3, 5, 6, 7\}$, donnés par Magma, sont :

$$\begin{aligned}
\phi_2(X, X) &= -(X - 1\,728)(X + 3\,375)^2(X - 8\,000),\\
\phi_3(X, X) &= -X(X - 54\,000)(X + 32\,768)^2(X - 8\,000)^2,\\
\phi_5(X, X) &= -(X - 1\,728)^2(X - 287\,496)^2(X + 32\,768)^2(X + 884\,736)^2\ P_1, ,\\
\phi_6(X, X) &= (X - 8\,000)^2\ P_1^2\ P_2\ P_3^2\ P_4^2,\\
\phi_7(X, X) &= -(X + 3\,375)(X - 16\,581\,375)X^2(X - 54\,000)^2\\
&\qquad \times (X + 12\,288\,000)^2(X + 884\,736)^2\ P_2^2,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
P_1 &= X^2 - 1\,264\,000\ X - 681\,472\,000,\\
P_2 &= X^2 - 4\,834\,944\ X + 14\,670\,139\,392,\\
P_3 &= X^2 + 191\,025\ X - 121\,287\,375,\\
P_4 &= X^3 + 3\,491\,750\ X^2 - 5\,151\,296\,875\ X + 12\,771\,880\,859\,375.
\end{aligned}$$

Comme m n'est pas carré, les racines de $\phi_m(X, X)$ dans $\mathbb{C}$ sont les invariants $j(\tau)$ de courbes elliptiques à multiplication complexe par un ordre quadratique imaginaire $\mathbb{Z}[\tau]$. Les ordres quadratiques associés aux invariants racines des facteurs de degré 1 sont donnés dans la littérature (voir par exemple [Cohen 1993, 7.2.3]). En

déterminant les ordres quadratiques imaginaires possédant un élément de norme 5, 6 et 7, on trouve une racine α_i du facteur P_i de degré 2 pour $i \in \{1, \ldots, 4\}$. On obtient ainsi les valeurs de $B_{i,i}(m)$ ($m \in \{2, 3, 5, 6, 7\}$) données dans la table ci-dessous où $a, b, c, d, e, f, g, h, v, w \in \{0, 1\}$ sont par définition égaux à 1 si et seulement si $j(\tau)$ est supersingulier modulo p, c'est-à-dire si p est inerte ou ramifié dans $\mathbb{Q}(\tau)$.

On supposera désormais que $p > 173$. Dans ce cas, les invariants apparaissant dans cette table sont tous distincts.

L'égalité $a = c$ équivaut à $h = d$ et $a = d$ équivaut à $v = g$. On fait parcourir au 8-uplet (a, b, c, d, e, f, g, w) les différentes valeurs possibles. Pour tous les 8-uplets distincts de ceux énumérés dans la Table 2, les fractions $\iota_j(y_{k,m})$, où $k, m \in \{2, 3, 5, 6, 7\}$, ne s'annulent pas simultanément. La table résume les résultats obtenus pour tous les 8-uplets posant un problème. Lorsque $\iota_j(y_{k,m})$ n'est pas une fraction identiquement nulle, on note $n_{k,m}$ le degré de son numérateur. Lorsque $n_{k,m} = 2$, $\iota_j(y_{k,m})$ a un zéro dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si le discriminant $d_{k,m}$ de son numérateur (dans $\mathbb{Z}$) est un carré modulo p.

j_i	τ	D_τ		$B_i(2)$	$B_i(3)$	$B_i(5)$	$B_i(6)$	$B_i(7)$
1728	$\sqrt{-1}$	4	a	1		2		
287496	$2\sqrt{-1}$	4	a			2		
-3375	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{-7})$	7	b	2				1
16581375	$\sqrt{-7}$	7	b					1
8000	$\sqrt{-2}$	8	c	1	2		2	
0	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$	3	d		1			2
54000	$\sqrt{-3}$	3	d		1			2
-12288000	$\frac{1}{2}(1+3\sqrt{-3})$	3	d					2
-32768	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{-11})$	11	e		2	2		
-884736	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{-19})$	19	f			2		2
α_1	$\sqrt{-5}$	20	g			1	2	
α_2	$\sqrt{-6}$	24	h				1	2
α_3	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{-15})$	15	v				2	
α_4	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{-23})$	23	w				2	

Table 1. Valeurs de $B_i(m) = B_{i,i}(m)$, $m \in \{2, 3, 5, 6, 7\}$.

$a\ b\ c\ d$	$e\ f$	$g\ w$	Résultat
0 0 1 0	0 0	0 0	voir texte ci-dessous
0 0 0 0	0 0	0 $*$	$\iota_j(y_{k,m}) = 0$ $(k, m \in \{2, 3, 5, 6, 7\})$
		1 0	$n_{5,6} = 2,\ d_{5,6} = 2^6.5^6.11^5.13^4.37^2.59.71,$ $\iota_j(y_{k,m}) = 0$ $(k, m) \neq (5, 6)$
		1 1	$n_{5,6} = 5,\ \iota_j(y_{k,m}) = 0$ $(k, m) \neq (5, 6)$
	0 1	0 0	$\iota_j(y_{k,m}) = 0$ $(k, m \in \{2, 3, 5, 6, 7\})$
		0 1	$\iota_j(y_{5,6}) = \iota_j(y_{6,7})$ $n_{5,6} = 2,$ $d_{5,6} = 2^6.5^7.7^4.31.36319.p_0$ $\iota_j(y_{k,m}) = 0$ si $(k, m) \neq (5, 6), (6, 7)$
	1 0	0 0	$\iota_j(y_{k,m}) = 0$ $(k, m \in \{2, 3, 5, 6, 7\})$
		0 1	$\iota_j(y_{3,6}) = \iota_j(y_{5,6}),\ n_{5,6} = 2,$ $d_{5,6} = 2^6.3.5^7.7^8.11^2.17^2.19^2.797$ $\iota_j(y_{k,m}) = 0$ si $(k, m) \neq (3, 6), (5, 6)$

Table 2. Résultats des calculs pous les cas exceptionnels. Le symbole $*$ signifie que le coefficient peut prendre indifféremment la valeur 0 ou 1. On rappelle que $p_0 = 45321935159$.

À titre d'exemple, lorsque $(a, b, c, d, e, f, g, w) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, on obtient

$$\iota_j(y_{2,3}) = \iota_j(y_{2,5}) = \iota_j(y_{3,5}) = \iota_j(y_{5,6}) = \iota_j(y_{5,7}) = 0$$

et $\iota_j(y_{2,6}),\ \iota_j(y_{3,6}),\ \iota_j(y_{2,7}),\ \iota_j(y_{3,7})$ et $\iota_j(y_{6,7})$ sont, à multiplication par une puissance de 2 près, égaux à

$$Q(j) = \frac{2}{j - 8000} - \frac{P_2'(j)}{P_2(j)} = \frac{-2^{11}\ (13.181\ j + 2^6.3^3.7.13.29)}{(j - 8000)\,P_2(j)}$$

qui s'annule en $j_0 \equiv -(181)^{-1}.2^6.3^3.7.29 \mod p$.

Posons $\mathcal{B}$ l'ensemble des nombres premiers p qui sont simultanément un carré modulo 3, 4 et 7 et qui vérifient l'une des conditions suivantes :

i) p carré modulo 5, 11, 19, et 23 et non carré modulo 8,

ii) p est un carré modulo 5, 8, 11 et 19 ;

iii) p carré modulo 8, 11 et 19, non carré modulo 5, 23 ;

iv) p carré modulo 8, 11, 19, 23, 59, 71, non carré modulo 5 ;

v) p carré modulo 8, 11, 19, 23, non carré modulo 5, 59, 71 ;

vi) p carré modulo 5, 8, 11, 23, non carré modulo 19 ;

vii) p carré modulo 5, 8, 11, non carré modulo 19, 23 et $\left(\frac{p}{31}\right)\left(\frac{p}{36319}\right)\left(\frac{p}{p_0}\right) = 1$;

viii) p carré modulo 5, 8, 19, 23, non carré modulo 11 ;

ix) p carré modulo 5, 8, 19, 797, non carré modulo 11, 23.

Lemme 4.1. *Si $p > 173$, $p \neq 797, 36319$, p_0 et $p \notin \mathscr{B}$, alors pour tout $j \in \mathbb{F}_p$ non supersingulier, il existe $(k, m) \in \{2, 3, 5, 6, 7\}^2$ tel que $\iota_j(y_{k,m}) \neq 0$ et par conséquent $X_0^+(p^r)(\mathbb{Q})$ est trivial.*

Démonstration. On vérifie aisément que lorsque p est comme dans l'énoncé et $j \in \mathbb{F}_p$, nous ne sommes pas dans l'un des cas énumérés dans la Table 2 et donc il y a une fraction non nulle parmi $\iota_j(y_{k,m})$, $(k, m) \in \{2, 3, 5, 6, 7\}^2$. □

Le lemme 4.1 et le théorème 1.1 de [Parent 2005] entraînent alors le Théorème 0.6. En effet, l'ensemble $\mathscr{C}$ du Théorème 0.6 est égal à $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ et 797, 36319, p_0 ne sont pas dans $\mathscr{A}$ (ici $\mathscr{A}$ est l'ensemble du théorème 1.1 de [Parent 2005]). Le cas des nombres premiers $p = 11$ et $17 \leq p \leq 173$ a été traité par Parent [2005, p. 8, preuve du théorème 1.1].

1873	3217	7417	8233	9241	10333	11257
15733	16921	17389	18313	19273	21961	26161
26497	26833	30097	31081	32377	34057	35281
36793	38329	38833	41617	42337	42793	48409

Table 3. Nombres premiers $p \leq 50000$ dans l'ensemble $\mathscr{C}$.

Remerciements

Je tiens ici à remercier L. Merel, P. Parent ainsi que le referee pour leurs remarques durant l'élaboration de cet article.

References

[Arakawa et Böcherer 2003] T. Arakawa et S. Böcherer, "Vanishing of certain spaces of elliptic modular forms and some applications", *J. Reine Angew. Math.* **559** (2003), 25–51. MR 2004m:11069 Zbl 1043.11040

[Bertolini et Darmon 1996] M. Bertolini et H. Darmon, "Heegner points on Mumford–Tate curves", *Invent. Math.* **126**:3 (1996), 413–456. MR 97k:11100 Zbl 0882.11034

[Bertolini et Darmon 1997] M. Bertolini et H. Darmon, "A rigid analytic Gross–Zagier formula and arithmetic applications", *Ann. of Math.* (2) **146**:1 (1997), 111–147. MR 99f:11079 Zbl 1029.11027

[Böcherer et Schulze-Pillot 1999] S. Böcherer et R. Schulze-Pillot, "Squares of automorphic forms on quaternion algebras and central values of L-functions of modular forms", *J. Number Theory* **76**:2 (1999), 194–205. MR 2000h:11046 Zbl 0940.11023

[Cohen 1993] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Graduate Texts in Mathematics **138**, Springer, Berlin, 1993. MR 94i:11105 Zbl 0786.11071

[Eichler 1955] M. Eichler, "Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren", *J. Reine Angew. Math.* **195** (1955), 127–151. MR 18,297c Zbl 0068.03303

[Emerton 2002] M. Emerton, "Supersingular elliptic curves, theta series and weight two modular forms", *J. Amer. Math. Soc.* **15**:3 (2002), 671–714. MR 2003b:11038 Zbl 01739913

[Gross 1987] B. H. Gross, "Heights and the special values of L-series", pp. 115–187 dans *Number theory* (Montreal, 1985), édité par H. Kisilevsky et J. Labute, CMS Conf. Proc. **7**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. MR 89c:11082 Zbl 0623.10019

[Gross et Kudla 1992] B. H. Gross et S. S. Kudla, "Heights and the central critical values of triple product L-functions", *Compositio Math.* **81**:2 (1992), 143–209. MR 93g:11047 Zbl 0807.11027

[Igusa 1959] J.-i. Igusa, "Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions", *Amer. J. Math.* **81** (1959), 561–577. MR 21 #7214 Zbl 0093.04502

[Illusie 1991] L. Illusie, "Réalisation l-adique de l'accouplement de monodromie d'après A. Grothendieck", 196–197 (1991), 27–44. MR 93c:14020 Zbl 0781.14011

[Lang 1987] S. Lang, *Elliptic functions*, 2$^{\text{e}}$ éd., Graduate Texts in Mathematics **112**, Springer, New York, 1987. MR 88c:11028 Zbl 0615.14018

[Merel 1996] L. Merel, "Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres", *Invent. Math.* **124**:1-3 (1996), 437–449. MR 96i:11057 Zbl 0936.11037

[Mestre et Oesterlé $\geq$ 2008] J.-F. Mestre et J. Oesterlé, "Courbes elliptiques de conducteur premier". Non publié. Please supply y

[Miyake 1989] T. Miyake, *Modular forms*, Springer, Berlin, 1989. MR 90m:11062 Zbl 0701.11014

[Momose 1984] F. Momose, "Rational points on the modular curves $X_{\text{split}}(p)$", *Compositio Math.* **52**:1 (1984), 115–137. MR 86j:11064 Zbl 0574.14023

[Momose 1986] F. Momose, "Rational points on the modular curves $X_0^+(p^r)$", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **33**:3 (1986), 441–466. MR 88a:11056 Zbl 0621.14018

[Momose 1987] F. Momose, "Rational points on the modular curves $X_0^+(N)$", *J. Math. Soc. Japan* **39**:2 (1987), 269–286. MR 88h:14031 Zbl 0623.14009

[Ogg 1978] A. P. Ogg, "On the Weierstrass points of $X_0(N)$", *Illinois J. Math.* **22**:1 (1978), 31–35. MR 57 #3136 Zbl 0374.14005

[Parent 2005] P. J. R. Parent, "Towards the triviality of $X_0^+(p^r)(\mathbb{Q})$ for $r > 1$", *Compos. Math.* **141**:3 (2005), 561–572. MR 2006a:11076 Zbl 02183028

[Raynaud 1991] M. Raynaud, "Jacobienne des courbes modulaires et opérateurs de Hecke", 196-197 (1991), 9–25. MR 93b:11077 Zbl 0781.14020

[Ribet 1983] K. A. Ribet, "Mod p Hecke operators and congruences between modular forms", *Invent. Math.* **71**:1 (1983), 193–205. MR 84j:10040 Zbl 0508.10018

[Serre 1972] J.-P. Serre, "Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques", *Invent. Math.* **15**:4 (1972), 259–331. Réimpression: pp. 1–73 dans ses *Œuvres*, tome 3, Springer, Berlin, 1986. MR 52 #8126 Zbl 0235.14012

[Serre 1986] J.-P. Serre, "Resume des cours 1975–1976", pp. 284–291 dans ses *Œuvres*, vol. III, Springer, Berlin, 1986. MR 89h:01109c

[de Shalit 1995] E. de Shalit, "On certain Galois representations related to the modular curve $X_1(p)$", *Compositio Math.* **95**:1 (1995), 69–100. MR 96i:11063 Zbl 0853.11045

[Zhang 2001] S.-W. Zhang, "Gross–Zagier formula for GL_2", *Asian J. Math.* **5**:2 (2001), 183–290. MR 2003k:11101 Zbl 01818531

Received December 1, 2006. Revised October 15, 2007.

MARUSIA REBOLLEDO
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
CAMPUS UNIVERSITAIRE DES CÉZEAUX
63177 AUBIÈRE
FRANCE

Marusia.Rebolledo@math.univ-bpclermont.fr
http://math.univ-bpclermont.fr/∼rebolledo/