Pacific Journal of Mathematics

REPRÉSENTATIONS DE STEINBERG MODULO p POUR UN GROUPE RÉDUCTIF SUR UN CORPS LOCAL

TONY LY

Volume 277 No. 2 October 2015

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 277, No. 2, 2015
dx.doi.org/10.2140/pjm.2015.277.425

REPRÉSENTATIONS DE STEINBERG MODULO p POUR UN GROUPE RÉDUCTIF SUR UN CORPS LOCAL

TONY LY

Soient F un corps local non archimédien localement compact de caractéristique résiduelle p et G un groupe réductif sur F. Soit R un corps de coefficients de caractéristique p. Nous montrons l'irréductibilité et l'admissibilité des représentations (lisses) de Steinberg généralisées de $G(F)$ sur R. Cela généralise les travaux de Grosse-Klönne et Herzig pour le cas où G est un groupe réductif déployé sur F.

Let F be a locally compact non-Archimedean local field of residue characteristic p and let G be a reductive group over F. Let R be a field of characteristic p. We prove the admissibility and the irreducibility of the so-called smooth generalized Steinberg representations of $G(F)$ over R. This generalizes previous works of Grosse-Klönne and Herzig for the case of G a split reductive group.

1. Introduction

Au début des années 1950, Steinberg [1951] introduit de nouvelles représentations (à coefficients complexes) pour le groupe général linéaire sur un corps fini. Quelques années plus tard, Curtis [1966] donne une formule agréable pour leur caractère. C'est dans l'esprit de cette dernière que sont aujourd'hui définies les représentations de Steinberg généralisées.

Grosse-Klönne [2014] établit leur admissibilité et leur irréductibilité lorsque G est un groupe classique déployé sur F et R est un corps de caractéristique $p > 0$. Ensuite, Herzig [2011] utilise les résultats préliminaires de [Grosse-Klönne 2014] et sa machinerie propre pour étendre ces propriétés à tout groupe réductif déployé G sur F de caractéristique nulle (mais avec R algébriquement clos).

On notera de fait que le résultat principal de [Herzig 2011] pour G le groupe général linéaire déployé met en emphase l'importance des représentations de Steinberg généralisées puisqu'avec les représentations dites supersingulières, elles représentent les « briques fondamentales » pour construire toutes les représentations lisses admissibles irréductibles modulo p de G.

MSC2010: 20C08, 22E50.
Mots-clefs: Steinberg representations, mod p representations, Hecke algebra.

L'objet de cette note est d'étendre les résultats de [Grosse-Klönne 2014] et de [Herzig 2011] sur les Steinberg généralisées pour G un groupe réductif quelconque. On développe ainsi l'analogue des paragraphes 2 et 3 de [Grosse-Klönne 2014] et du paragraphe 7 de [Herzig 2011] dans le cas non déployé.

2. Contexte général

Soient p un nombre premier et $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{F}_p$; tout corps fini de caractéristique p sera vu comme un sous-corps de $\overline{\mathbb{F}}_p$. Toute représentation considérée ici sera lisse.

Soit F un corps local non archimédien localement compact à corps résiduel fini k_F de caractéristique p. Soient F^{sep} une clôture séparable de F et $F^{\mathrm{un}} \subseteq F^{\mathrm{sep}}$ la sous-extension maximale non ramifiée de F. On note $\mathcal{I} = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F^{\mathrm{un}})$ le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois absolu de F et $\sigma \in \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{un}}/F)$ le générateur topologique correspondant à un Frobenius arithmétique.

Soit G un groupe réductif connexe sur F. Kottwitz [1997, paragraphe 7] définit un morphisme fonctoriel et surjectif

$$\kappa_G : G(F^{\mathrm{un}}) \to X^*(Z(\widehat{G})^{\mathcal{I}}),$$

où $\widehat{G}$ désigne le dual de Langlands connexe de G et $Z(\widehat{G})$ son centre. On note $\mathcal{B}$ l'immeuble de Bruhat–Tits du groupe adjoint $G_{\mathrm{ad}}(F^{\mathrm{un}})$. Un sous-groupe parahorique de G est un groupe de la forme [1]

$$\ker \kappa_G \cap G(F) \cap \mathrm{Fix}\,\mathcal{F}$$

pour une facette σ-invariante $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ (voir [Bruhat et Tits 1984, 5.2.6 ; Henniart et Vignéras 2015, paragraphe 3.3 ; Haines 2009, paragraphe 8]). Si $\mathcal{F}$ est une chambre, on parle de *sous-groupe d'Iwahori*.

Si H est un sous-groupe parahorique de G associé à une facette σ-invariante $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$, on lui associe un groupe $H \leq \widetilde{H} \leq G(F)$ défini par :

$$\widetilde{H} := \{g \in G(F) \cap \mathrm{Fix}\,\mathcal{F} \mid \kappa_G(g) \text{ est de torsion}\}.$$

Soient K un sous-groupe parahorique maximal spécial de $G(F)$ et $K(1)$ le pro-p-radical de K (voir paragraphe 3.6 de [Henniart et Vignéras 2015]). Le quotient $K/K(1)$ est le groupe des k_F-points d'un groupe réductif $\overline{G}$.

Soient T un tore maximal parmi les tores F-déployés de G et A le centralisateur de T dans G. Soient B un parabolique minimal de G de composante de Levi A et U son radical unipotent. Lorsque Q est un parabolique contenant B, on notera Q^- son parabolique opposé au sens du Théorème 4.15 de [Borel et Tits 1965].

1. On a noté $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F}$ le fixateur point par point des simplexes de dimension 0 composant $\mathcal{F}$.

Pour tout sous-groupe H de G défini sur F, on note

$$\overline{H} := (H(F) \cap K)/(H(F) \cap K(1))$$

le sous-groupe de $\overline{G}(k_F)$ correspondant.

On confondra par abus G et ses sous-groupes paraboliques (resp. composante de Levi, radical unipotent de sous-groupes paraboliques) avec leurs F-points. De même pour $\overline{G}$ et ses sous-groupes paraboliques (resp. composante de Levi, radical unipotent de sous-groupes paraboliques) avec leurs k_F-points.

3. Définitions et résultats

Soit R un anneau commutatif unitaire. Soit Q un sous-groupe parabolique standard (c'est-à-dire qui contient [2] B) de G. On définit la G-représentation à coefficients dans R suivante :

$$\mathrm{St}_Q\, R := \frac{\mathrm{Ind}_Q^G \mathrm{id}}{\sum_{Q' \gneq Q} \mathrm{Ind}_{Q'}^G \mathrm{id}}.$$

Ici, comme dans toute la suite, on a noté Ind le foncteur d'induction lisse et on fait agir G sur $\mathrm{Ind}_Q^G \mathrm{id}$ par translation à droite.

Théorème 3.1. *Soit R un corps de caractéristique p. La représentation de Steinberg généralisée* St_Q *R est irréductible et admissible.*

Remarque. Lorsque F est de caractéristique 0, l'admissibilité suit automatiquement de [Vignéras 2012b]. Par contre, lorsque F est de caractéristique p, à ma connaissance on ne sait pas se passer de l'argument de cet article.

On va présenter une preuve de cet énoncé dans les paragraphes qui suivent. Commençons par énoncer un corollaire (on dira un mot de la preuve dans le paragraphe 9).

Corollaire 3.2. *Les constituants de Jordan–Hölder de* $\mathrm{Ind}_Q^G \mathrm{id}$ *sont les* $\mathrm{St}_{Q'}$ *R pour les sous-groupes paraboliques* [3] *Q' contenant Q. Ils sont deux à deux non isomorphes et de multiplicité* 1.

On donnera aussi la filtration par les cosocles de $\mathrm{Ind}_Q^G \mathrm{id}$.

2. Cette hypothèse n'est en fait utile que lorsque l'on veut utiliser la comparaison parabolique-compacte de [Henniart et Vignéras 2012].

3. Comme Q' contient Q standard, il l'est automatiquement aussi.

4. Sous-groupe d'Iwahori et sous-groupes radiciels

Soient Φ le système de racines de G associé à T et Φ_{red} le système réduit associé :

$$\Phi_{\text{red}} = \{a \in \Phi \mid a/2 \notin \Phi\}.$$

Le groupe parabolique minimal B nous fournit un sous-ensemble de racines positives $\Phi_{\text{red}}^{+} \subseteq \Phi_{\text{red}}$ et un système de racines simples Δ. On note $\Phi_{\text{red}}^{-} := \Phi_{\text{red}} \smallsetminus \Phi_{\text{red}}^{+}$ et, pour $\alpha \in \Phi_{\text{red}}$, on appelle s_α la réflexion correspondante. On note W le groupe de Weyl fini (déterminé par T) et $l : W \to \mathbb{N}$ la longueur (déterminée par Δ). Soit w_0 l'élément le plus long de W.

Pour $w \in W$, on notera encore w un relèvement (fixé une fois pour toutes) de w dans le normalisateur $N_G(T) \cap K$ de T dans K (ce qui est possible car K est spécial) ou bien l'image de ce relèvement dans $\overline{G}$.

On fait remarquer que le paragraphe 1 de [Grosse-Klönne 2014] ne concerne que des groupes de réflexions cristallographiques avec système de racines réduit. Il est donc valable lorsque l'on travaille avec Φ_{red} et le lecteur ne devra pas être surpris quand on y fera référence.

Soit I le sous-groupe d'Iwahori de G suivant : si x_0 est le point spécial de l'immeuble de $G_{\text{ad}}(F^{\text{un}})$ fixe par K, et si $\mathscr{C}$ est la chambre de sommet x_0 et fixe par B, alors I est le parahorique fixant $\mathscr{C}$ (voir paragraphe 2). On dispose alors de la décomposition d'Iwasawa (voir [Bruhat et Tits 1972, Proposition 7.3.1]) : [4]

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B w \tilde{I}.$$

Aussi, on a des injections naturelles

$$A \cap \widetilde{K} / A \cap K \hookrightarrow \tilde{I}/I \hookrightarrow \widetilde{K}/K.$$

La composée est un isomorphisme par [Henniart et Vignéras 2015, Lemma 6.2(iii)] ; la première flèche est donc un isomorphisme

$$A \cap \widetilde{K} / A \cap K \xrightarrow{\sim} \tilde{I}/I.$$

On a donc finalement

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B w (A \cap \widetilde{K}) I = \bigsqcup_{w \in W} B w I, \tag{1}$$

4. Ici, comme dans tout ce qui suit, l'appel à [Bruhat et Tits 1972] nécessite de faire attention que cela est bien loisible : c'est l'objet du Théorème 5.1.20 de [Bruhat et Tits 1984], comme expliqué dans son introduction. Par la suite, on gardera cet énoncé en tête sans le rappeler à chaque fois, mais on se permet d'insister que son importance est cruciale.

où la seconde égalité vient de l'inclusion $w(A \cap K)w^{-1} \subseteq A \cap K \subseteq B$. Pour tout sous-groupe H de G, on pose $H^0 := H \cap I$.

Pour $\alpha \in \Phi$, on note U_α le sous-groupe radiciel associé. Comme on a l'inclusion $U_{2\alpha} \subsetneq U_\alpha$ si $\{\alpha, 2\alpha\} \subseteq \Phi$, il convient de remarquer aussi $U^0_{2\alpha} \subseteq U^0_\alpha$. Par la Proposition 6.1.6 de [Bruhat et Tits 1972], on a donc

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{red}}} U_\alpha = U, \qquad \prod_{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{red}}} U^0_\alpha = U^0,$$

quel que soit l'ordre choisi sur Φ^+_{red}.

Soit J un sous-ensemble de Δ. Les s_α pour $\alpha \in J$ engendrent un sous-groupe W_J de W. On note aussi

$$W^J := \{w \in W \mid \forall \alpha \in J,\ l(ws_\alpha) > l(w)\}.$$

On a, par [Humphreys 1992, Lemma 1.6 et Corollary 1.7],

$$W^J = \{w \in W \mid w(J) \subseteq \Phi^+_{\mathrm{red}}\}. \tag{2}$$

Aussi, grâce à [Humphreys 1992, Proposition 1.10 et paragraphe 5.12], on a le fait important suivant : l'ensemble W^J est un système de représentants de W/W_J contenant l'élément le plus court de chaque classe.

On note le sous-ensemble de W^J constitué des éléments primitifs

$$W^J_{\mathrm{pr}} := W^J \smallsetminus \bigcup_{\alpha \in \Delta \smallsetminus J} W^{J \cup \{\alpha\}} = \{w \in W^J \mid w(\Delta \smallsetminus J) \subseteq \Phi^-_{\mathrm{red}}\},$$

de sorte que l'on a $W = \bigsqcup W^J_{\mathrm{pr}}$, lorsque J parcourt les sous-ensembles de Δ.

On définit aussi le sous-ensemble suivant de Φ_{red} :

$$W_J.J := \{w\alpha \mid w \in W_J,\ \alpha \in J\}.$$

5. Détermination de $(\mathrm{St}_Q\, R)^I$

Soit R un anneau commutatif unitaire.

Soit J un sous-ensemble propre de Δ. Pour $w \in W^{J \cup \{\alpha\}}$ et $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$, on définit

$$\partial(w) := \sum_{\substack{w' \in W^J \\ w' W_J \subseteq w W_{J \cup \{\alpha\}}}} w' \in R[W^J],$$

où $R[W^J]$ désigne le R-module libre de base les éléments de W^J. En prolongeant par R-linéarité, on a la suite exacte

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta \smallsetminus J} R[W^{J \cup \{\alpha\}}] \xrightarrow{\partial} R[W^J] \xrightarrow{\nabla} \mathfrak{M}_J(R) \to 0, \tag{3}$$

qui définit l'application linéaire ∇ et le R-module $\mathfrak{M}_J(R)$. Ce dernier module est un objet essentiel pour la compréhension du module des I-invariants de $\mathrm{St}_J\, R$. Et Grosse-Klönne [2014, Proposition 1.3(a)] a démontré que $\mathfrak{M}_J(R)$ est libre de rang $|W_{\mathrm{pr}}^J|$.

Par la Proposition 2.4 de [Bushnell et Henniart 2006] appliqué[5] à $H = \{1\}$ et au groupe profini I, le foncteur des fonctions localement constantes $C^\infty(I, \cdot)$ est exact. En appliquant $C^\infty(I, \cdot)$ à (3), on obtient la suite exacte

$$C^\infty\Big(I, \bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} R[W^{J\cup\{\alpha\}}]\Big) \to C^\infty(I, R[W^J]) \to C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R)) \to 0.$$

Par abus, on note encore ces flèches ∂ et ∇ respectivement.

Notons, pour $J \subseteq \Delta$ et $w \in W$:

$$P_J := BW_JB, \quad {}^wP_J := wP_Jw^{-1}. \tag{4}$$

On remarque que ${}^wP_J$ ne dépend que de la classe de w dans W/W_J. Par définition de P_J son radical unipotent est égal à

$$N_J = \prod_{\alpha\in\Phi^+_{\mathrm{red}}\smallsetminus(\Phi^+_{\mathrm{red}}\cap W_J.J)} U_\alpha.$$

On fixe aussi un sous-groupe de Levi M_J de P_J contenant A et W_J. Énonçons tout de suite une inclusion entre les ${}^wP_J$ qui nous sera utile dans très peu de temps.

Lemme 5.1. *Soit $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$. Soient w et w' des éléments de W vérifiant $w'W_J \subseteq wW_{J\cup\{\alpha\}}$. On a les inclusions*[6]

$${}^{w'}P_J \subseteq {}^wP_{J\cup\{\alpha\}}; \quad {}^{w'}P_J^0 \subseteq {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe un élément $\sigma \in W_{J\cup\{\alpha\}}$ vérifiant $w' = w\sigma$. La première inclusion vient immédiatement :

$${}^{w'}P_J = w\sigma P_J\sigma^{-1}w^{-1} \subseteq {}^wP_{J\cup\{\alpha\}}.$$

La seconde suit par intersection avec I. □

Pour $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$, en notant $C^\infty({}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I, R)$ le sous-espace de $C^\infty(I, R)$ constitué des fonctions ${}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}$-invariantes à gauche, on a une injection

$$\bigoplus_{w\in W^{J\cup\{\alpha\}}} C^\infty({}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I, R) \hookrightarrow C^\infty(I, R[W^{J\cup\{\alpha\}}])$$

5. Dans cette référence toutes les représentations sont à coefficients complexes mais cela n'influe pas sur la preuve de la proposition en question.

6. On omet les parenthèses pour alléger les notations, mais ${}^wP_J^0$ doit se lire $({}^wP_J)^0$.

donnée par la flèche

$$(f_{\alpha,w})_w \mapsto \sum_w f_{\alpha,w} w.$$

On a de même une injection

$$\bigoplus_{w\in W^J} C^\infty({}^wP_J^0\backslash I,\, R) \hookrightarrow C^\infty(I,\, R[W^J]).$$

On verra dorénavant les injections précédentes comme des inclusions. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C^\infty(I, \bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} R[W^{J\cup\{\alpha\}}]) \arrow[r, "\partial"] & C^\infty(I, R[W^J]) \arrow[r, "\nabla"] & C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R)) \arrow[r] & 0 \\ \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Delta\smallsetminus J\\ w\in W^{J\cup\{\alpha\}}}} C^\infty({}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I, R) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\partial"] & \bigoplus_{w\in W^J} C^\infty({}^wP^0_J\backslash I, R) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\nabla"] & C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R)) \arrow[u, equal] \end{tikzcd} \tag{5}$$

Vérifions que l'image de $\bigoplus_{\alpha,w} C^\infty({}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I,\, R)$ par ∂ est bien incluse dans $\bigoplus_{W^J} C^\infty({}^wP^0_J\backslash I,\, R)$. Fixons pour cela $\alpha \in \Delta\smallsetminus J$. On a

$$\partial\Bigl(\sum_{w\in W^{J\cup\{\alpha\}}} f_{\alpha,w} w\Bigr) = \sum_{w'\in W^J}\Bigl(\sum_{\substack{w\in W^{J\cup\{\alpha\}}\\ w'W_J\subseteq wW_{J\cup\{\alpha\}}}} f_{\alpha,w}\Bigr) w'; \tag{6}$$

il s'agit donc de voir que $\sum_{w'W_J\subseteq wW_{J\cup\{\alpha\}}} f_{\alpha,w}$ est ${}^{w'}P^0_J$-invariante à gauche. En fait, chacun des termes de cette somme l'est. En effet, chaque $f_{\alpha,w}$ est ${}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}$-invariant à gauche ; par le lemme 5.1, il est aussi ${}^{w'}P^0_J$-invariant et ∂ envoie bien $\bigoplus_{\alpha,w} C^\infty({}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I,\, R)$ dans $\bigoplus_{W^J} C^\infty({}^wP^0_J\backslash I,\, R)$.

Proposition 5.2. *La ligne du bas du diagramme* (5) *est exacte.*

L'introduction de quelques objets est nécessaire avant d'aborder la preuve de cette proposition. Remarquons que, par [Humphreys 1992, Corollary 1.5], le sous-système $\Phi_J \subseteq \Phi_{\mathrm{red}}$ engendré par J vérifie

$$\Phi_J^- = \Phi_{\mathrm{red}}^- \cap W_J.J.$$

On dit que $D \subsetneq \Phi_{\mathrm{red}}$ est *J-quasi-parabolique* s'il est l'intersection de certains $w(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_J)$.

Énonçons maintenant un lemme/définition particulièrement utile.

Lemme 5.3. *Soit $D \subsetneq \Phi_{\mathrm{red}}$ une partie J-quasi-parabolique. Le produit $\prod_D U^0_\alpha$ est indépendant de l'ordre choisi sur D : il forme un sous-groupe de G que l'on notera U^0_D.*

Démonstration. Comme D est J-quasi-parabolique, on voit qu'il est suffisant de prouver que $\prod_{w(\Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-})} U_\alpha^0$ est indépendant de l'ordre sur $w(\Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-})$ pour un $w \in W$ tel que D est contenu dans $w(\Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-})$. Quitte à conjuguer par w, on suppose à présent $w = 1$.

Il reste donc à voir la condition de commutateurs sur la partie $\Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-} \subseteq \Phi_{\mathrm{red}}^{-}$ pour pouvoir appliquer la Proposition [7] 6.1.6 de [Bruhat et Tits 1972]. Il s'agit de voir dans un premier temps que si α et β sont des éléments de $\Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-}$ alors on a

$$(U_\alpha, U_\beta) \subseteq \langle U_{n\alpha+m\beta} \mid n\alpha + m\beta \in \Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-},\ m, n \in \mathbb{N}^* \rangle. \tag{7}$$

On sait déjà par l'axiomatique de Bruhat–Tits que (U_α, U_β) est inclus dans $\langle U_{n\alpha+m\beta} \mid n\alpha + m\beta \in \Phi_{\mathrm{red}}^{-},\ m, n \in \mathbb{N}^* \rangle$. Puis on remarque que, comme on a $\alpha, \beta \notin \Phi_J^{-}$, aucune des sommes $n\alpha + m\beta$ n'appartient à Φ_J^{-} non plus.

En prenant les intersections avec I, parce que $I \cap \prod_{\alpha \in \Phi_{\mathrm{red}}^{-}} U_\alpha$ est égal à $\prod_{\alpha \in \Phi_{\mathrm{red}}^{-}} U_\alpha^0$ par la Proposition [8] 5.2.32 de [Bruhat et Tits 1972], (7) devient

$$(U_\alpha^0, U_\beta^0) \subseteq \langle U_{n\alpha+m\beta}^0 \mid n\alpha + m\beta \in \Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-},\ m, n \in \mathbb{N}^* \rangle.$$

Le lemme en découle. □

Pour $w \in W$, on pose

$$D_w = w(\Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-}) :$$

le groupe $U_{D_w}^0$ est l'intersection de I avec le radical unipotent de ${}^w P_J^{-}$ (défini en (4)) (voir [Demazure 2011b, Proposition 1.12]). On remarque que D_w ne dépend que de la classe de w dans W/W_J, et que, pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$, on a $w(\Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_{J\cup\{\alpha\}}^{-}) \subseteq w(\Phi_{\mathrm{red}}^{-} \smallsetminus \Phi_J^{-})$.

L'introduction des ensembles J-quasi-paraboliques s'explique alors par le fait que l'on va s'intéresser à l'intersection de tels $U_{D_w}^0$ pour différents $w \in W$ et à la décomposition d'Iwahori qui suit.

Lemme 5.4. *Soient $J \subseteq \Delta$ et $w \in W$. Le produit ${}^w P_J^0 \times U_{D_w}^0 \to I$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Par la Proposition 5.2.32 de [Bruhat et Tits 1972], on a la décomposition d'Iwahori

$$\tilde{I} = \biggl(\prod_{\beta \in w\Phi_{\mathrm{red}}^{+}} U_\beta^0 \biggr) (A \cap \widetilde{K}) \biggl(\prod_{\beta \in w\Phi_{\mathrm{red}}^{-}} U_\beta^0 \biggr),$$

où les produits sur $w\Phi_{\mathrm{red}}^{+}$ et $w\Phi_{\mathrm{red}}^{-}$ sont indépendants de l'ordre par la Proposition 6.1.6 de [Bruhat et Tits 1972]. En l'intersectant avec le noyau du morphisme

7. On l'applique à $Y_\alpha = U_\alpha \cap I \supseteq Y_{2\alpha} = U_{2\alpha} \cap I$ et $X_\alpha = U_\alpha \cap I$.

8. Cette dernière s'occupe de $U \cap \tilde{I}$, mais en prenant l'intersection avec le noyau du morphisme de Kottwitz, on voit l'égalité $U \cap \tilde{I} = U \cap I$.

de Kottwitz κ_G, parce que l'on a $A^0 = A \cap K$, cela permet d'écrire

$$I = \Big(\prod_{\beta\in w\Phi^+_{\mathrm{red}}} U^0_\beta\Big) A^0 \Big(\prod_{\beta\in w\Phi^-_{\mathrm{red}}} U^0_\beta\Big) =: I^+ A^0 I^-.$$

La décomposition

$$(8)\qquad {}^w P^0_J = \Big(\prod_{\beta\in w\Phi^+_{\mathrm{red}}} U^0_\beta\Big) A^0 \Big(\prod_{\beta\in w\Phi^-_J} U^0_\beta\Big)$$

suit par intersection avec ${}^w P_J$: I^+ et A^0 sont inclus dans ${}^w P_J$ et donc ${}^w P^0_J$ est égal à $I^+ A^0 (I^- \cap {}^w P_J)$. Il en résulte la bijection

$$(9)\qquad U^0_{D_w} = {}^w U^0_{\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_J} \xrightarrow{\sim} {}^w P^0_J \backslash I.$$

On en déduit que le produit ${}^w P^0_J \times U^0_{D_w} \to I$ est un homéomorphisme : c'est une bijection par (9), le produit est continu et une bijection continue d'un espace compact vers un espace séparé est un homéomorphisme. $\square$

Pour un sous-ensemble D de Φ_{red}, on note

$$(10)\qquad W^J(D) := \{w \in W^J \mid D \subseteq w(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_J)\}.$$

Lemme 5.5. *Soient $D, D' \subseteq \Phi_{\mathrm{red}}$ deux ensembles J-quasi-paraboliques. Soient $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$ et $w \in W^{J\cup\{\alpha\}}(D)$. On a l'égalité d'ensembles*

$$(11)\qquad {}^w P^0_{J\cup\{\alpha\}} U^0_D \cap {}^w P^0_{J\cup\{\alpha\}} U^0_{D'} = {}^w P^0_{J\cup\{\alpha\}} (U^0_D \cap U^0_{D'}).$$

Démonstration. L'inclusion $\supseteq$ est évidente ; prouvons $\subseteq$. En appliquant le lemme 5.3, le produit $\prod_{\beta\in D} U^0_\beta$ est indépendant de l'ordre. Choisissons un ordre sur D tel que tout élément de $D \smallsetminus (D\cap D')$ soit placé avant tout élément de $D\cap D'$. On forme le produit $\prod_{\beta\in D\smallsetminus(D\cap D')} U^0_\beta$ suivant cet ordre et on le note $U^0_{D\smallsetminus D'}$, de sorte que l'on a

$$U^0_D = U^0_{D\smallsetminus D'} U^0_{D\cap D'}$$

($D \cap D'$ est J-quasi-parabolique et la notation est celle du lemme 5.3). Il est équivalent de voir $\subseteq$ dans (11) et

$${}^w P^0_{J\cup\{\alpha\}} U^0_{D\smallsetminus D'} \cap U^0_{D'} \subseteq {}^w P^0_{J\cup\{\alpha\}} (U^0_D \cap U^0_{D'}).$$

On va même montrer que ${}^w P^0_{J\cup\{\alpha\}} U^0_{D\smallsetminus D'} \cap U^0_{D'}$ est inclus dans ${}^w P^0_{J\cup\{\alpha\}}$. Notons

$$(12)\qquad \Phi' = \Phi_{\mathrm{red}} \smallsetminus w(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}) = \{\beta \in \Phi_{\mathrm{red}} \mid U_\beta \subseteq {}^w P^0_{J\cup\{\alpha\}}\}.$$

Puisque w est dans $W^{J\cup\{\alpha\}}(D)$, l'intersection de D et de Φ' est vide ; ou autrement dit, la partie $(J\cup\{\alpha\})$-quasi-parabolique

$$D_{\alpha,w} = w(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_{J\cup\{\alpha\}})$$

contient D. Par le lemme 5.3 pour $D_{\alpha,w}$, le produit $\prod_{\beta\in D_{\alpha,w}} U_\beta^0$ est indépendant de l'ordre : on choisit un ordre sur $D_{\alpha,w}$ tel que sa restriction à D coïncide avec l'ordre précédemment choisi sur D et tel que tout élément de D précède tout élément de $D_{\alpha,w} \smallsetminus D$. On forme le produit $\prod_{\beta\in D_{\alpha,w}\smallsetminus D} U_\beta^0$ suivant cet ordre et on le note $U^0_{D_{\alpha,w}\smallsetminus D}$, de sorte que l'on a

$$U^0_{D_{\alpha,w}} = U^0_D U^0_{D_{\alpha,w}\smallsetminus D}.$$

Par (9), on a alors la décomposition en produit direct d'ensembles

$$I = {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}} U^0_{D\smallsetminus D'} U^0_{D\cap D'} U^0_{D_{\alpha,w}\smallsetminus D}. \tag{13}$$

Par le (8) dans la preuve du lemme 5.4, on a la décomposition d'Iwahori

$${}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}} = \Bigl(\prod_{\beta\in w\Phi^+_{\mathrm{red}}} U^0_\beta\Bigr) A^0 \Bigl(\prod_{\beta\in w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}} U^0_\beta\Bigr). \tag{14}$$

Parce que $w\Phi^+_{\mathrm{red}}$ vérifie la condition des commutateurs, on peut appliquer la Proposition[9] 6.1.6 de [Bruhat et Tits 1972] et dire que $\prod_{\beta\in w\Phi^+_{\mathrm{red}}} U^0_\beta$ est un produit indépendant de l'ordre sur $w\Phi^+_{\mathrm{red}}$, que l'on notera $U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}}$. On choisit un ordre sur $w\Phi^+_{\mathrm{red}}$ tel que tout élément de $w\Phi^+_{\mathrm{red}} \cap D'$ précède tout élément de $w\Phi^+_{\mathrm{red}} \smallsetminus (D' \cap w\Phi^+_{\mathrm{red}})$. On forme

$$U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\cap D'} = \prod_{\beta\in w\Phi^+_{\mathrm{red}}\cap D'} U^0_\beta, \quad U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\smallsetminus D'} = \prod_{\beta\in w\Phi^+_{\mathrm{red}}\smallsetminus(D'\cap w\Phi^+_{\mathrm{red}})} U^0_\beta,$$

et on a

$$U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}} = U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\cap D'} U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\smallsetminus D'}.$$

De la même manière, on choisit un ordre sur $w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}$ tel que tout élément de $w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}$ qui appartient à D' précède tout élément qui n'y appartient pas : on obtient $U^0_{w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}} = U^0_{w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}\cap D'} U^0_{w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}\smallsetminus D'}$. L'identité (14) devient

$${}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}} = U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\cap D'} U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\smallsetminus D'} A^0 U^0_{w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}\cap D'} U^0_{w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}\smallsetminus D'};$$

et (13) devient le produit direct

$$I = U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\cap D'} U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\smallsetminus D'} A^0 U^0_{w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}\cap D'} U^0_{w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}\smallsetminus D'} U^0_{D\smallsetminus D'} U^0_{D\cap D'} U^0_{D_{\alpha,w}\smallsetminus D}. \tag{15}$$

Grâce à (15), un élément de $U^0_{D'} \cap {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}} U^0_{D\smallsetminus D'}$ est dans le produit

$$U^0_{w\Phi^+_{\mathrm{red}}\cap D'} U^0_{w\Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}\cap D'} \subseteq {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}$$

et le lemme est prouvé. □

9. Ici encore, on prend $Y_a = U_a \cap I \supseteq Y_{2a} = U_{2a} \cap I$ et $X_a = U_a \cap I$.

Démonstration de la proposition 5.2. On commence par numéroter tous les sous-ensembles J-quasi-paraboliques de Φ_{red} : $D_0, D_1, D_2, \ldots$ par ordre croissant de taille, c'est-à-dire avec

$$n < m \implies |D_n| \leq |D_m|.$$

Soit $f \in C^\infty(I, R[W^J])$, image de

$$(f_w)_{w \in W^J} \in \bigoplus_{w \in W^J} C^\infty({}^w P_J^0 \backslash I, R)$$

par la flèche verticale du diagramme (5), tel que l'on a $\nabla f = 0$, c'est-à-dire $\nabla(f(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. On cherche $g \in C^\infty(I, \bigoplus_{\alpha \in \Delta \smallsetminus J} R[W^{J \cup \{\alpha\}}])$, image de

$$(g_{\alpha,w})_{\alpha,w} \in \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta \smallsetminus J \\ w \in W^{J \cup \{\alpha\}}}} C^\infty({}^w P^0_{J \cup \{\alpha\}} \backslash I, R),$$

vérifiant $f = \partial g$.

On va montrer par récurrence l'existence d'une telle fonction g satisfaisant $f = \partial g$ sur $\bigcup_{n \geq 0} U^0_{D_n}$. Ceci implique $f = \partial g$ car f et ∂g proviennent de la ligne du bas du diagramme (5) et que l'on a ${}^w P_J^0 \big(\bigcup_{n \geq 0} U^0_{D_n} \big) = I$ pour tout $w \in W^J$ par le lemme 5.4. La démonstration se fera en deux étapes :

— il existe g telle que f est égale à ∂g sur $U^0_{D_0}$;

— si f est nulle sur $\bigcup\limits_{n<m} U^0_{D_n}$, alors il existe g vérifiant $f = \partial g$ sur $\bigcup\limits_{n \leq m} U^0_{D_n}$ $(m \geq 1)$.

La situation de l'étape d'initiation est la suivante : on a

$$D_0 = \varnothing = (\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_J) \cap w_0(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_J), \quad U^0_{D_0} = \{1\}.$$

La fonction f vérifie $(\nabla f)(1) = \nabla(f(1)) = 0$. Comme la suite (3) est exacte, on choisit, une famille d'éléments

$$(g^{(1)}_{\alpha,w})_{\alpha,w} \in \bigoplus_{\alpha \in \Delta \smallsetminus J} R[W^{J \cup \{\alpha\}}]$$

telle que l'on a $\partial((g^{(1)}_{\alpha,w})_{\alpha,w}) = f(1)$. Soit, pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$ et tout $w \in W^{J \cup \{\alpha\}}$, $g_{\alpha,w}$ une fonction de $C^\infty({}^w P^0_{J \cup \{\alpha\}} \backslash I, R)$ valant $g^{(1)}_{\alpha,w}$ sur ${}^w P^0_{J \cup \{\alpha\}}$. Alors l'image g de

$$(g_{\alpha,w})_{\alpha,w} \in \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta \smallsetminus J \\ w \in W^{J \cup \{\alpha\}}}} C^\infty({}^w P^0_{J \cup \{\alpha\}} \backslash I, R)$$

dans $C^\infty(I, \bigoplus_{\alpha \in \Delta \smallsetminus J} R[W^{J \cup \{\alpha\}}])$ vérifie $\partial g = f$ sur $U^0_{D_0} = \{1\}$. L'étape d'initiation est terminée.

Montrons maintenant la propriété de propagation de la récurrence. Soit, pour tout $w \in W^J$, $f_w \in C^\infty({}^w P_J^0 \backslash I, R)$ nulle sur $\bigcup_{n<m} U^0_{D_n}$.

Si w est un élément de $W^J \smallsetminus W^J(D_m)$, f_w est nulle sur $U^0_{D_m}$ puisque l'on a ${}^wP^0_J U^0_{D_m} = {}^wP^0_J U^0_{D_n}$ pour $n < m$ vérifiant

$$D_m \cap w(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_J) = D_n.$$

En effet, il suffit de remarquer qu'un tel $n < m$ existe par définition de $W^J(D_m)$ (voir (10)) et que l'on a alors $U^0_{D_m} = (U^0_{D_m} \cap {}^wP^0_J)U^0_{D_n}$.

Nous allons trouver la fonction g comme image de

$$(g_{\alpha,w})_{\alpha,w} \in \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Delta\smallsetminus J\\ w\in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)}} C^\infty({}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I, R)$$

telle que $(f - \partial g)_{w'}$ est nulle sur $\bigcup_{n\le m} U^0_{D_n}$ pour tout $w' \in W^J(D_m)$. Comme $(\partial g)_{w'}$ est nulle [10] pour $w' \in W^J \smallsetminus W^J(D_m)$, $(f - \partial g)_{w'}$ sera nulle sur $\bigcup_{n\le m} U^0_{D_n}$ pour tout $w' \in W^J$.

La fonction f est localement constante sur le compact $\bigcup_{n\le m} U^0_{D_n}$ et nulle sur $\bigcup_{n<m} U^0_{D_n}$. Soient $(C_i)_{0\le i\le r}$ les ouverts disjoints de $\bigcup_{n\le m} U^0_{D_n}$ vérifiant

$$\bigcup_i C_i = \bigcup_{n\le m} U^0_{D_n}$$

et tels que f_w est constant sur C_i, égal à $f_w^{(i)}$, et $f_w^{(0)} = 0$ pour tout $w \in W^J(D_m)$ et $(f_w^{(i)})_{w\in W^J(D_m)} \neq (f_w^{(i')})_{w\in W^J(D_m)}$ si $i \neq i'$. En particulier, on notera que C_0 contient $\bigcup_{n<m} U^0_{D_n}$ et que $U^0_{D_m}$ est l'union disjointe de $C_0 \cap U^0_{D_m}$ et des C_i pour $1 \le i \le r$.

La suite extraite de (3)

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} R[W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)] \xrightarrow{\partial} R[W^J(D_m)] \xrightarrow{\nabla} \mathfrak{M}_J(R) \tag{16}$$

est encore exacte (voir [Grosse-Klönne 2014, Proposition 1.3(b)]). Par ailleurs, $(f_w^{(i)})_{w\in W^J(D_m)}$ appartient au noyau de ∇ dans (16) car on a $\nabla f = 0$ et $f_w = 0$ pour $w \in W^J \smallsetminus W^J(D_m)$. Il existe alors, pour tout $0 \le i \le r$,

$$g^{(i)} = (g^{(i)}_{\alpha,w})_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J, w\in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)} \in \bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} R[W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)]$$

tel que l'on a $g^{(0)} = 0$ et

$$\partial(g^{(i)}) = (f_w^{(i)})_{w\in W^J(D_m)} \in R[W^J(D_m)]. \tag{17}$$

10. En (6), la somme sur les w vérifiant $w'W_J \subseteq wW_{J\cup\{\alpha\}}$ ne fait intervenir que des $w \notin W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)$ car $w'W_J \subseteq wW_{J\cup\{\alpha\}}$ implique ${}^{w'}P_J \subseteq {}^wP_{J\cup\{\alpha\}}$ par le lemme 5.1, et donc $w(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_{J\cup\{\alpha\}}) \subseteq w'(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_J)$ par (12) (voir définition (10) aussi).

Posons $D_{\alpha,w} = w(\Phi^-_{\mathrm{red}} \smallsetminus \Phi^-_{J\cup\{\alpha\}})$ pour $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$ et $w \in W$. Pour tout $w \in W$, le produit ${}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}} \times U^0_{D_{\alpha,w}} \to I$ est un homéomorphisme par le lemme 5.4, donc on a

$$C^\infty({}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I, R) \simeq C^\infty(U^0_{D_{\alpha,w}}, R).$$

Soient $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$ et $w \in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)$. Notons U' la projection [11] de $\bigcup_{n<m} U^0_{D_n}$ sur $U^0_{D_{\alpha,w}}$: c'est le sous-espace de $U^0_{D_{\alpha,w}}$ vérifiant

$${}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}U' = {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\Big(\bigcup_{n<m} U^0_{D_n}\Big).$$

Supposons qu'il existe, pour $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$ et $w \in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)$, une fonction $g_{\alpha,w} \in C^\infty(U^0_{D_{\alpha,w}}, R)$ nulle sur $U' \cup (C_0 \cap U^0_{D_m})$ et constante, égale à $g^{(i)}_{\alpha,w}$, sur C_i pour $1 \leq i \leq r$. Soit alors $g \in C^\infty(I, \bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} R[W^{J\cup\{\alpha\}}])$ l'image de

$$(g_{\alpha,w})_{\alpha,w} \in \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Delta\smallsetminus J\\ w\in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)}} C^\infty({}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I, R).$$

Soit $w' \in W^J(D_m)$. Grâce à (17), on a alors

$$(\partial g)_{w'} = \sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} \sum_{\substack{w\in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)\\ w'W_J\subseteq wW_{J\cup\{\alpha\}}}} g^{(i)}_{\alpha,w} = f^{(i)}_{w'} = f_{w'}$$

sur chaque C_i pour $1 \leq i \leq r$; la même égalité est vraie sur $C_0 \cap U^0_{D_m}$, de sorte que l'on a $(\partial g)_{w'} = f_{w'}$ sur tout $U^0_{D_m}$. Pour $x \in \bigcup_{n\leq m} U^0_{D_n} \smallsetminus U^0_{D_m}$, pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$ et tout $w \in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)$, il existe $p_{\alpha,w} \in {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}$ et $u_{\alpha,w} \in U'$ vérifiant $x = p_{\alpha,w}u_{\alpha,w}$. On a alors

$$(\partial g)_{w'}(x) = \sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} \sum_{\substack{w\in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)\\ w'W_J\subseteq wW_{J\cup\{\alpha\}}}} g_{\alpha,w}(u_{\alpha,w}) = 0.$$

Il nous reste à vérifier l'existence des fonctions $g_{\alpha,w}$. Soient $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$ et $w \in W^{J\cup\{\alpha\}}(D_m)$. Par définition de U', on a

$${}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}U' \cap {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}U^0_{D_m} = {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\Big(\bigcup_{n<m} U^0_{D_n}\Big) \cap {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}U^0_{D_m},$$

et par le lemme 5.5, on a

$${}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\Big(\bigcup_{n<m} U^0_{D_n}\Big) \cap {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}U^0_{D_m} = {}^wP^0_{J\cup\{\alpha\}}\bigg(\Big(\bigcup_{n<m} U^0_{D_n}\Big) \cap U^0_{D_m}\bigg).$$

On sait alors que $U' \cap U^0_{D_m}$ est inclus dans $C_0 \cap U^0_{D_m}$: comme $g^{(0)}_{\alpha,w}$ est nul, les conditions imposées sur les valeurs de $g_{\alpha,w}$ sont compatibles. L'espace $U' \cup U^0_{D_m}$ est une union disjointe de $U' \cup (C_0 \cap U^0_{D_m})$ et des C_i pour $1 \leq i \leq r$. Les C_i, pour

11. Remarquons que U' dépend de α et de w.

$1 \le i \le r$, sont ouverts compacts dans $U^0_{D_m}$ et U' est compact. Le complémentaire de U' dans $U' \cup U^0_{D_m}$ contient C_i, donc C_i est ouvert dans $U' \cup U^0_{D_m}$ pour tout $1 \le i \le r$. Comme $\bigcup_{1\le i\le r} C_i$ est compact, son complémentaire $U' \cup (C_0 \cap U^0_{D_m})$ dans $U' \cup U^0_{D_m}$ est ouvert.

Il existe donc une fonction $g'_{\alpha,w} \in C^\infty(U' \cup U^0_{D_m}, R)$ nulle sur $U' \cup (C_0 \cap U^0_{D_m})$ et constante, égale à $g^{(i)}_{\alpha,w}$, sur C_i pour $1 \le i \le r$. Comme $U' \cup U^0_{D_m}$ est fermé dans $U^0_{D_{\alpha,w}}$, le morphisme de restriction

$$C^\infty(U^0_{D_{\alpha,w}}, R) \to C^\infty(U' \cup U^0_{D_m}, R)$$

est surjectif : il existe une fonction $g_{\alpha,w}$ sur $U^0_{D_{\alpha,w}}$ prolongeant $g'_{\alpha,w}$ comme voulue. La récurrence est donc terminée et la proposition prouvée. □

Pour $J \subseteq \Delta$, on définit la G-représentation de Steinberg généralisée $\mathrm{St}_J\, R$ par la suite exacte

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C^\infty(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, R) \xrightarrow{\partial} C^\infty(P_J\backslash G, R) \to \mathrm{St}_J\, R \to 0. \tag{18}$$

On observe que cela coïncide avec la définition de $\mathrm{St}_Q\, R$ lorsque $Q = P_J$.

Corollaire 5.6. *Le R-module $\mathrm{St}_J\, R$ est libre. Et il existe une injection I-équivariante*

$$\iota_R : \mathrm{St}_J\, R \hookrightarrow C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R))$$

dont la formation commute aux changements de base.

Démonstration. La flèche $i \mapsto P_J w^{-1} i$ induit une bijection ensembliste

$${}^wP^0_J\backslash I \xrightarrow{\sim} P_J\backslash P_J w^{-1} I.$$

De plus, toute inclusion $w'W_J \subseteq wW_{J\cup\{\alpha\}}$ donne alors lieu à un diagramme commutatif comme suit (par le lemme 5.1) :

$$\begin{tikzcd} {}^wP^0_J\backslash I \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & {}^{w'}P^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I \arrow[d, "\sim"] \\ P_J\backslash P_J w^{-1} I \arrow[r] & P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}(w')^{-1} I \end{tikzcd}$$

Les w^{-1} pour $w \in W^J$ (resp. $w' \in W^{J\cup\{\alpha\}}$) forment un système de représentants de $W_J\backslash W$ (resp. $W_{J\cup\{\alpha\}}\backslash W$). On a les décompositions d'Iwasawa suivantes (conséquences directes de (1) et du Corollaire 4.2.2 de [Bruhat et Tits 1972]) :

$$P_J\backslash G = \bigsqcup_{w\in W^J} P_J\backslash P_J w^{-1} I, \quad P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G = \bigsqcup_{w'\in W^{J\cup\{\alpha\}}} P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}(w')^{-1} I.$$

On en déduit les sommes directes

$$C^\infty(P_J\backslash G, R) = \bigoplus_{w\in W^J} C^\infty(P_J\backslash P_J w^{-1} I, R),$$

$$C^\infty(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, R) = \bigoplus_{w'\in W^{J\cup\{\alpha\}}} C^\infty(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}(w')^{-1} I, R).$$

Il en découle le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C^\infty(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, R) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & C^\infty(P_J\backslash G, R) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{St}_J\, R \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
\bigoplus\limits_{\substack{\alpha\in\Delta\smallsetminus J\\ w'\in W^{J\cup\{\alpha\}}}} C^\infty({}^{w'}P^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I, R) \arrow[r] & \bigoplus\limits_{w\in W^J} C^\infty({}^{w}P^0_{J}\backslash I, R) \arrow[r] & C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R)) &
\end{tikzcd} \tag{19}$$

La première ligne est exacte par définition de $\mathrm{St}_J\, R$ (voir (18)) et la seconde l'est par la proposition 5.2. On en déduit que l'application

$$\iota_R : \mathrm{St}_J\, R \hookrightarrow C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R))$$

est injective ; elle est aussi I-équivariante car toutes les flèches pleines du diagramme le sont.

Étudions d'abord le cas $R=\mathbb{Z}$: parce que l'on a

$$\mathfrak{M}_J(R) = \mathfrak{M}_J(\mathbb{Z})\otimes_Z R,$$

on a la propriété de changement de base voulue. Grâce à la Proposition 1.3(a) de [Grosse-Klönne 2014] et au lemme A.1, le $\mathbb{Z}$-module $C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(\mathbb{Z}))$ est libre. Or un sous-module d'un module libre sur un anneau principal est libre. Ainsi $\mathrm{St}_J\,\mathbb{Z}$ est libre, et $\mathrm{St}_J\, R$ est libre sur R par changement de base. [12] $\square$

Avant de déterminer à proprement parler $(\mathrm{St}_J\, R)^I$, on commence par déterminer $C^\infty(P_J\backslash G, R)^I$.

Lemme 5.7. *Le R-module $C^\infty(P_J\backslash G, R)^I$ est libre de rang $|W^J|$.*

Démonstration. La décomposition d'Iwasawa (voir (1)) fournit

$$G = \bigsqcup_{W^J} P_J w^{-1} I.$$

12. On a bien $\mathrm{St}_J\,\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} R = \mathrm{St}_J\, R$ comme la suite exacte

$$0\to \sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C^\infty(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, \mathbb{Z}) \to C^\infty(P_J\backslash G, \mathbb{Z}) \to \mathrm{St}_J\,\mathbb{Z}\to 0$$

reste exacte après tensorisation par R, les deux $\mathbb{Z}$-modules à gauche étant libres par l'appendice A.

Grâce à cette décomposition, on définit, pour chaque $w \in W^J$, la fonction f_w de $C^\infty(P_J\backslash G, R)^I$ par $f_w(w^{-1}) = 1$ et $f_w(w') = 0$ si $w' \in (W^J)^{-1} \smallsetminus \{w^{-1}\}$. Le R-module $C^\infty(P_J\backslash G, R)^I$ est alors libre et engendré par $(f_w)_{w\in W^J}$. □

Proposition 5.8. *L'espace des I-invariants $(\mathrm{St}_J\, R)^I$ est un R-module libre de rang $|W^J_{\mathrm{pr}}|$.*

De plus, les images $\bar{f}_w$ dans $\mathrm{St}_J\, R$ des fonctions f_w (pour $w \in W^J_{\mathrm{pr}}$) définies dans la preuve du lemme 5.7 forment une base explicite de $(\mathrm{St}_J\, R)^I$.

Démonstration. Appliquons le foncteur des I-invariants au carré commutatif du diagramme (19). On obtient les applications de R-modules :

$$R[W^J] = \bigoplus_{w\in W^J} C^\infty({}^wP^0_J\backslash I, R)^I \to (\mathrm{St}_J\, R)^I \to C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R))^I = \mathfrak{M}_J(R). \tag{20}$$

Parce que ι_R est injective et que le foncteur des I-invariants est exact à gauche, la flèche de droite de (20) est injective. Enfin la composée (20) est surjective par définition de $\mathfrak{M}_J(R)$. Alors on a un isomorphisme

$$(\mathrm{St}_J\, R)^I \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_J(R)$$

de R-modules, ce qui fait de $(\mathrm{St}_J\, R)^I$ un R-module libre de rang $|W^J_{\mathrm{pr}}|$ (par [Grosse-Klönne 2014, Proposition 1.2(a)]).

En prenant les I-invariants du diagramme commutatif (19), on obtient le diagramme suivant, où les carrés du haut sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C^\infty(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, R)^I \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & C^\infty(P_J\backslash G, R)^I \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & (\mathrm{St}_J\, R)^I \arrow[d, "\sim"] & \\
\bigoplus_{\substack{\alpha\in\Delta\smallsetminus J\\ w'\in W^{J\cup\{\alpha\}}}} C^\infty({}^{w'}P^0_{J\cup\{\alpha\}}\backslash I, R)^I \arrow[r, "\partial"] & \bigoplus_{w\in W^J} C^\infty({}^wP^0_J\backslash I, R)^I \arrow[r] & C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R))^I & \\
\bigoplus_{\substack{\alpha\in\Delta\smallsetminus J\\ w'\in W^{J\cup\{\alpha\}}}} R[W^{J\cup\{\alpha\}}] \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "\sim"] & R[W^J] \arrow[r] \arrow[u, "\sim"] & \mathfrak{M}_J(R) \arrow[r] \arrow[u, "\sim"] & 0
\end{tikzcd}$$

On remarque que l'on a utilisé la preuve du premier point pour affirmer l'isomorphisme de R-modules libres que constitue la flèche verticale en haut à droite. Les carrés du bas du diagramme sont commutatifs en vertu de ce que la description des fonctions du lemme 5.7 est compatible avec la discussion d'avant la proposition 5.2. Le résultat suit. □

Une conséquence importante est l'assertion de l'admissibilité dans le théorème 3.1.

Corollaire 5.9. *Supposons que R soit un corps de caractéristique p. Alors $\mathrm{St}_J\, R$ est admissible.*

Démonstration. En regardant le diagramme commutatif (19), on voit que $\mathrm{St}_J\, R$ est l'image de $\bigoplus_{w\in W^J} C^\infty({}^wP_J^0\backslash I, R)$ dans $C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R))$. Comme chaque ${}^wP_J^0$ contient $A\cap I$, cette image est en fait incluse dans $C^\infty(A\cap I\backslash I, \mathfrak{M}_J(R)) \subseteq C^\infty(I, \mathfrak{M}_J(R))$. Si $I(1)$ désigne le pro-p-Sylow de I, on a $(A\cap I)I(1) = I$; il suit les égalités $C^\infty(A\cap I\backslash I, \mathfrak{M}_J(R))^I = C^\infty(A\cap I\backslash I, \mathfrak{M}_J(R))^{I(1)}$, et donc $(\mathrm{St}_J\, R)^I = (\mathrm{St}_J\, R)^{I(1)}$.

Traitons d'abord le cas $R = \overline{\mathbb{F}}_p$: le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $(\mathrm{St}_J\, \overline{\mathbb{F}}_p)^{I(1)} = (\mathrm{St}_J\, \overline{\mathbb{F}}_p)^I$ est de dimension finie par la proposition 5.8. Comme $I(1)$ contient $K(1)$, il est ouvert et on peut appliquer [Paskunas 2004, Theorem 6.3.2], et $\mathrm{St}_J\, \overline{\mathbb{F}}_p$ est admissible.

Dans le cas $R = \mathbb{F}_p$, on remarque que l'on a $(\mathrm{St}_J\, \overline{\mathbb{F}}_p)^H = (\mathrm{St}_J\, \mathbb{F}_p)^H \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout sous-groupe ouvert H de G. L'admissibilité de $\mathrm{St}_J\, \overline{\mathbb{F}}_p$ implique alors celle de $\mathrm{St}_J\, \mathbb{F}_p$. Enfin, pour R un corps de caractéristique p, $\mathbb{F}_p$ est naturellement un sous-corps de R. On a alors $(\mathrm{St}_J\, R)^H = (\mathrm{St}_J\, \mathbb{F}_p)^H \otimes_{\mathbb{F}_p} R$ pour tout $H \le G$ ouvert. Le résultat en découle. □

Remarque. Marie-France Vignéras nous fait remarquer que l'on peut aussi prouver ce fait en se servant du corollaire 5.6. Alors, pour tout sous-groupe compact ouvert H de I, l'espace d'invariants $(\mathrm{St}_J\, R)^H$ s'injecte dans le R-espace vectoriel de dimension finie $C(I/H, \mathfrak{M}_J(R))$. Par ailleurs, un tel argument reste tout à fait valable pour R un anneau principal (sans hypothèse sur la caractéristique).

6. Comparaison avec le cas fini

On retourne à R un anneau commutatif unitaire. On cherche à comparer les représentations de Steinberg généralisées avec leur analogue dans le cas fini.

On remarque d'abord que comme on a choisi K comme étant le parahorique associé à un sommet spécial, le groupe de Weyl associé à l'adhérence schématique $\widetilde{T}$ de $\overline{T}$ est encore W (voir [Bruhat et Tits 1984, Propositions 4.4.5 et 4.6.4 ; Haines et Rapoport 2008, Proposition 12]). Le système de racines $\overline{\Phi}$ associé à la paire $(\overline{B}, \widetilde{T})$ est un sous-système de Φ et il n'est pas nécessairement réduit ; on considère alors son réduit $\overline{\Phi}_{\mathrm{red}}$. Parce que $\overline{\Phi}_{\mathrm{red}}$ et Φ_{red} sont tous deux des sous-systèmes réduits de Φ qui contiennent une $\mathbb{R}$-base de $X^*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, on a une correspondance bijective

$$\Phi_{\mathrm{red}} \xrightarrow{\sim} \overline{\Phi}_{\mathrm{red}}, \quad \alpha \mapsto \alpha \text{ ou } 2\alpha.$$

Cette bijection exhibe un sous-ensemble de racines simples $\overline{\Delta}$ de $\overline{\Phi}$ en correspondance avec Δ de la même manière :

$$\overline{\Delta} := \bigcup_{\alpha\in\Delta} \{\alpha, 2\alpha\} \cap \overline{\Phi}_{\mathrm{red}}.$$

Pour J un sous-ensemble de Δ, on associe alors de cette manière $\overline{J} \subseteq \overline{\Delta}$.

De même que pour le paragraphe précédent, le lecteur ne s'étonnera pas des invocations du paragraphe 1 de [Grosse-Klönne 2014] pour des résultats concernant $\overline{\Phi}_{\mathrm{red}}$.

Lemme 6.1. *Soit J un sous-ensemble de Δ. La réduction $\overline{P}_J$ de P_J est $P_{\overline{J}}$, le parabolique de $\overline{G}$ associé à $\overline{J}$.*

Remarque. On peut aussi se reporter au Corollaire 4.6.4 de [Bruhat et Tits 1984].

Démonstration. La réduction de P_J est

$$\overline{P}_J = P_J \cap K / P_J \cap K(1)$$

et on affirme qu'elle est engendrée par les images dans $\overline{G}$ de $A \cap K$ et des $U_\alpha \cap K$ pour $\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{red}} \cup W_J.J$. En effet, par décomposition de Bruhat, il suffit de voir que $B \cap K$ et $W_J \subseteq K$ sont inclus dans le sous-groupe de K engendré par $A \cap K$ et les $U_\alpha \cap K$ pour $\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{red}} \cup W_J.J$. Pour $B \cap K$, cela suit de [Henniart et Vignéras 2015, Theorem 6.5], qui affirme $B \cap K = (A \cap K)(U \cap K)$; et donc $B \cap K$ est engendré par $A \cap K$ et les $U_\alpha \cap K$ pour $\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{red}}$. Soient $\beta \in J$ et $u \in U_{-\beta} \cap K$ d'image non nulle dans $\overline{U}_{-\beta}$. Par [Carter 1985, Corollary 2.6.2], il existe alors $\overline{b}_1, \overline{b}_2 \in \overline{B}$ tels que l'on ait $\bar{u} = \overline{b}_1 s \overline{b}_2$ où s est la réflexion dans $W_J \subseteq K$ correspondant à β. En relevant $\overline{b}_1$ et $\overline{b}_2$ respectivement en b_1 et b_2 dans $B \cap K$, on voit que s est bien dans le groupe engendré par $A \cap K$ et les $U_\alpha \cap K$ pour $\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{red}} \cup W_J.J$. Les tels s formant un système de générateurs de W_J, on a bien l'affirmation voulue sur $\overline{P}_J$.

Le groupe $P_{\overline{J}}$ est quant à lui engendré par $\overline{A} = Z_{\overline{G}}(\overline{T})$ et les $U_{\overline{\alpha}}$ pour $\overline{\alpha} \in \overline{\Phi}^+ \cup W_{\overline{J}}.\overline{J}$. Ce sont bien là les mêmes groupes radiciels par la remarque suivant le Lemma 6.12 de [Henniart et Vignéras 2015]. □

Pour $\overline{J} \subseteq \overline{\Delta}$ (correspondant à $J \subseteq \Delta$), on garde la même définition de la représentation de Steinberg généralisée $\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$; on rappelle la suite exacte de $\overline{G}$-représentations qui la définit :

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta \smallsetminus J} C(\overline{P}_{J \cup \{\alpha\}} \backslash \overline{G}, R) \to C(\overline{P}_J \backslash \overline{G}, R) \to \overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R \to 0.$$

Commençons par exhiber des éléments particuliers de $(\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R)^{\overline{B}}$: pour w un élément de $W^{\overline{J}}_{\mathrm{pr}}$, notons $\overline{g}_w \in \overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$ l'image de la fonction caractéristique g_w de

$$\overline{P}_J w^{-1} \overline{B} = \overline{P}_J w^{-1} (\overline{U} \cap w \overline{U}^- w^{-1})$$

dans $\mathrm{Ind}_{\overline{P}_J}^{\overline{G}} \mathrm{id}$.

Soit $w \in W$. On va commencer par prouver l'affirmation

$$\overline{P}_J w^{-1} \overline{B} = \overline{P}_J w^{-1} (\overline{U} \cap w \overline{U}^- w^{-1}).$$

On a d'abord

$$\overline{B} w^{-1} \overline{B} = \overline{B} w^{-1} \overline{A}\,\overline{U} = \overline{B} w^{-1} \overline{U}. \tag{21}$$

Ensuite, par la Proposition 6.1.6 de [Bruhat et Tits 1972], on a

$$\overline{U} = (\overline{U} \cap w\overline{U}w^{-1})(\overline{U} \cap w\overline{U}^{-}w^{-1}). \tag{22}$$

Il s'ensuit

$$\bar{B}w^{-1}\overline{U} = \bar{B}w^{-1}(\overline{U} \cap w\overline{U}^{-}w^{-1}).$$

La même égalité subsiste alors avec $\overline{P}_J \geq \bar{B}$ à gauche plutôt que $\bar{B}$, et l'égalité voulue est prouvée.

Si on fait subir à $(\overline{G}, \overline{\Phi}_{\mathrm{red}}, \bar{J})$ le raisonnement du paragraphe précédent, on trouve alors que $(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}}R)^{\bar{B}}$ est un R-module libre, de base $(\bar{g}_w)_{w\in W^{\bar{J}}_{\mathrm{pr}}}$. Cependant, savoir ce fait n'est pas nécessaire tout de suite, et la preuve de la proposition 6.2 nous le redonnera à moindres frais.

On a une décomposition d'Iwasawa $G = P_J K$ (voir [Haines et Rostami 2010, Corollary 9.1.2]). L'application $P_J\backslash G \to \overline{P}_J\backslash\overline{G}$ est continue (car $P_J K(1)$ est fermé dans G) et surjective. On a donc l'injection naturelle (k désigne ici un représentant de $\bar{k}$ dans K) :

$$C(\overline{P}_J\backslash\overline{G}, R) \to C^{\infty}(P_J\backslash G, R), \quad f \mapsto (P_J k \mapsto f(\overline{P}_J\bar{k})).$$

Dès lors, on a le diagramme suivant de K-représentations.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C(\overline{P}_{J\cup\{\alpha\}}\backslash\overline{G}, R) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, hook] & C(\overline{P}_J\backslash\overline{G}, R) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}}R \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\iota"] & 0 \\
\bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C^{\infty}(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, R) \arrow[r, "\varphi_2"] & C^{\infty}(P_J\backslash G, R) \arrow[r] & \mathrm{St}_J R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme les deux flèches verticales de gauche sont des injections et parce que l'on a l'égalité

$$\varphi_2\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C^{\infty}(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, R)\Big) \cap C(\overline{P}_J\backslash\overline{G}, R) = \varphi_1\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C(\overline{P}_{J\cup\{\alpha\}}\backslash\overline{G}, R)\Big),$$

la flèche de droite est aussi injective. Dans l'égalité précédente, l'inclusion $\supseteq$ est évidente. Pour obtenir l'inclusion inverse $\subseteq$, soit f une fonction de

$$\varphi_2\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} C^{\infty}(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, R)\Big) \cap C(\overline{P}_J\backslash\overline{G}, R),$$

que l'on voit comme une fonction sur K. Elle s'écrit $f = \sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus J} \varphi_2(f_\alpha)$ avec $f_\alpha \in C^{\infty}(P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G, R)$ pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$. Fixons, pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$, $\mathcal{K}_\alpha$ un ensemble fini de représentants de $\overline{P}_{J\cup\{\alpha\}}\backslash\overline{G}$ dans $P_{J\cup\{\alpha\}}\backslash G$. On définit alors, pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$, $f'_\alpha \in C(\overline{P}_{J\cup\{\alpha\}}\backslash\overline{G}, R)$ par $f'_\alpha(\bar{k}) = f_\alpha(k)$ pour tout $k \in \mathcal{K}_\alpha$ d'image

$\bar{k} \in \overline{P}_{J\cup\{\alpha\}}\backslash\overline{G}$. Parce que le diagramme ci-dessus est commutatif et que f est dans $C(\overline{P}_J\backslash G, R)$, on obtient

$$\sum_\alpha \varphi_1(f'_\alpha) = \sum_\alpha \varphi_2(f_\alpha) = f$$

et l'inclusion $\subseteq$ voulue.

Proposition 6.2. *L'injection K-équivariante*

$$\iota : \overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R \hookrightarrow \mathrm{St}_J\, R$$

induit l'isomorphisme de R-modules

$$(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R)^{\overline{B}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{St}_J\, R)^I.$$

Démonstration. L'injection $\iota : \overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R \hookrightarrow \mathrm{St}_J\, R$ étant K-équivariante, on en déduit l'injection

$$(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R)^{\overline{B}} \hookrightarrow (\mathrm{St}_J\, R)^I,$$

que l'on notera encore ι. Par la proposition 5.8, le R-module $(\mathrm{St}_J\, R)^I$ est libre de rang $|W^J_{\mathrm{pr}}|$.

Commençons par considérer le cas $R = \mathbb{Z}$. En tant que sous-module de $(\mathrm{St}_J\, \mathbb{Z})^I$, $(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}}\mathbb{Z})^{\overline{B}}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang majoré par $|W^{\bar{J}}_{\mathrm{pr}}| = |W^J_{\mathrm{pr}}|$ (on a $|W_J| = |W_{\bar{J}}|$ pour tout $J \subseteq \Delta$). Pour prouver l'isomorphisme voulu, il suffit d'exhiber une base de $(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}}\mathbb{Z})^{\overline{B}}$ qui s'envoie sur la base $(\bar{f}_w)_{w\in W^J_{\mathrm{pr}}}$ de $(\mathrm{St}_J\, \mathbb{Z})^I$, où $\bar{f}_w$ est l'image de $f_w \in C^\infty(P_J\backslash G, \mathbb{Z})$ (voir proposition 5.8) dans $\mathrm{St}_J\, \mathbb{Z}$. Il reste à remarquer que, par le lemme 6.1, la famille $(\bar{g}_w)_{w\in W^{\bar{J}}_{\mathrm{pr}}}$ s'envoie par ι sur $(\bar{f}_w)_{w\in W^J_{\mathrm{pr}}}$.

Revenons à R général : on a la situation suivante

$$\eta : (\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}}\mathbb{Z})^{\overline{B}} \otimes_{\mathbb{Z}} R \hookrightarrow (\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R)^{\overline{B}} \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\mathrm{St}_J\, R)^I.$$

Parce que la famille $(\bar{g}_w \otimes 1)_{w\in W^{\bar{J}}_{\mathrm{pr}}}$ d'éléments de $(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}}\mathbb{Z})^{\overline{B}} \otimes_{\mathbb{Z}} R$ s'envoie par η sur $(\bar{f}_w)_{w\in W^J_{\mathrm{pr}}}$, η est un isomorphisme et [13] ι induit l'isomorphisme

$$(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R)^{\overline{B}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{St}_J\, R)^I. \qquad \square$$

Corollaire 6.3. *La famille $(\bar{g}_w)_{w\in W^{\bar{J}}_{\mathrm{pr}}}$ forme une base du R-module libre $(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R)^{\overline{B}}$.*

7. Représentations de Steinberg généralisées dans le cas fini

Dans toute cette section, G désignera un groupe réductif fini : cela permettra d'alléger les notations et d'éviter de surligner un nombre déraisonnable de symboles. Aussi, quand on fera référence à l'« axiomatique des systèmes de Tits » ou « des BN-paires », on pensera au cadre des « strongly split BN-pairs of characteristic p »

13. Cela garantit au passage que la formation de $\left(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}}\,\cdot\right)^{\overline{B}}$ commute au changement de base.

du chapitre I.2 de [Cabanes et Enguehard 2004], ce qui est loisible grâce au paragraphe 5.2 de [Henniart et Vignéras 2015].

Soit $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. Comme pour les autres éléments de W, on ne fera pas de distinction entre un élément $s \in S$ et son relèvement fixé dans $N_G(T)$.

Supposons à partir de maintenant que R est un anneau commutatif unitaire de caractéristique p. On cherche à comprendre un peu mieux la structure de $(\mathrm{St}_J\, R)^B$, notamment grâce à une structure de $\mathcal{H}_R(G, B)$-module héritée comme suit. Si π est une G-représentation, la réciprocité de Frobenius confère à son espace de B-invariants

$$\pi^B \simeq \mathrm{Hom}_B(\mathrm{id}, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_B^G \mathrm{id}, \pi)$$

une structure de module à droite sur

$$\mathcal{H}_R(G, B) := \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_B^G \mathrm{id}).$$

A tout $w \in W$, on peut associer l'opérateur de Hecke T_w défini sur π^B par

$$v \mapsto vT_w = \sum_{\gamma \in B\backslash BwB} \gamma^{-1} v = \sum_{u \in (B \cap w^{-1}Bw)\backslash B} u^{-1}w^{-1}v.$$

Pour $w \in W$, on note [14]

$$U_w := U \cap wU^- w^{-1} = \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{red}} \\ w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-_{\mathrm{red}}}} U_\alpha.$$

Par la première étape de la preuve de la proposition 6.2 (notamment l'équation (22)), pour $s \in S$, on peut voir U_s comme un ensemble de représentants de $(B \cap s^{-1}Bs)\backslash B = (B \cap sBs^{-1})\backslash B$ (car s^2 est un élément de T). Pour $\pi = \mathrm{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}$, $w \in W^J$ et $s \in S$, la formule d'action se réécrit

$$g_w T_s = \sum_{u \in U_s} u^{-1}s^{-1}g_w = \sum_{u \in U_s} \mathrm{id}_{P_J w^{-1} U_w s u}. \tag{23}$$

C'est cette action qu'on va investiguer à travers les deux résultats techniques suivants.

Pour $w \in W$, on note w^J le représentant de wW_J dans W^J (on rappelle que W^J est un système de représentants de W/W_J).

Lemme 7.1. *Soient $w \in W^J$ et $s \in S$.*

(a) *Si $(sw)^J = w$, alors on a*

$$P_J w^{-1} U_w s u = P_J w^{-1} U_w \quad \textit{si } u \in U_s.$$

14. Par [Carter 1985, paragraphe 1.18, Corollary 2.5.17 et discussion suivant Proposition 2.6.3], l'ordre n'a pas d'importance.

(b) *Si $l((sw)^J) > l(w)$, alors on a*

$$P_J w^{-1} U_w s U_s = P_J w^{-1} s U_{sw}.$$

(c) *Si $l((sw)^J) < l(w)$, alors on a $s = s_\beta$ avec $\beta \in \Delta$ et $w^{-1}(\beta) \in \Phi^-_{\mathrm{red}}$. Posons*

$$U' = \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{red}} \smallsetminus \{\beta\} \\ w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-_{\mathrm{red}}}} U_\alpha ;$$

c'est un sous-groupe de U_w. On a

$$\begin{aligned} P_J w^{-1} U' u s U_s &= P_J w^{-1} U_w \qquad \text{si } u \in U_s \smallsetminus \{1\}, \\ P_J w^{-1} U' s u &= P_J w^{-1} s U_{sw} \quad \text{si } u \in U_s. \end{aligned}$$

De plus, toutes ces relations sont des égalités entre produits directs d'ensembles.

Remarque. Ce sont des raffinements dans l'axiomatique des systèmes de Tits que l'on peut déjà trouver dans [Grosse-Klönne 2014] pour le cas déployé (Lemma 3.1) : on se permet de reproduire sa preuve ici en rajoutant quelques commentaires, notamment pour le fait que les produits d'ensembles sont directs.

Démonstration. Commençons par le fait que les produits sont directs : il s'agit tout d'abord de voir que le produit $P_J w^{-1} U_w$ est direct. Supposons pour cela

$$q_1 w^{-1} u_1 = q_2 w^{-1} u_2 \quad \text{avec } q_1, q_2 \in P_J,\ u_1, u_2 \in U_w.$$

On a alors

$$u_1 u_2^{-1} \in w P_J w^{-1} \cap w U^- w^{-1} \cap U.$$

Regardons à quoi ressemblent les éléments de $w^{-1} U w \cap U^- \cap P_J$. Ils sont inclus dans

$$U^- \cap w^{-1} U w = \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^-_{\mathrm{red}} \\ w(\alpha) \in \Phi^+_{\mathrm{red}}}} U_\alpha .$$

De plus, par définition de $w \in W^J$ (voir (2)), pour tout α négativement engendré par J, on a $w(\alpha) \in \Phi^-_{\mathrm{red}}$. Dès lors, comme P_J ne contient que les sous-groupes radiciels associés à la partie quasi-close (au sens du 3.8 de [Borel et Tits 1965]) $\Phi^+_{\mathrm{red}} \cup (\Phi^-_{\mathrm{red}} \cap W_J.J)$, l'intersection $w^{-1} U w \cap U^- \cap P_J$ est réduite à l'élément neutre et le produit $P_J w^{-1} U_w$ est direct.

Une fois que toutes les égalités seront prouvées, le fait que les autres produits sont directs se ramène à chaque fois au cas précédent. Par exemple, regardons le terme de gauche de la première égalité de (c). L'ensemble $P_J w^{-1} U' u s U_s$ est de cardinal majoré par $|P_J| \cdot |U'| \cdot |U_s| = |P_J| \cdot |U_w|$. Or l'égalité avec $P_J w^{-1} U_w$, qui est un produit direct, nous dit que le cardinal de $P_J w^{-1} U' u s U_s$ est exactement $|P_J| \cdot |U_w|$. C'est donc que le produit est aussi direct et cela prouve bien le fait voulu.

Montrons (a). On a d'abord

$$P_J w^{-1} U_w s = P_J w^{-1} B s \subseteq P_J w^{-1} B \cup P_J w^{-1} s B \tag{24}$$

par les équations (21) et (22) et l'axiomatique des BN-paires. Parce que l'on a $(sw)^J = w$, ces deux dernières doubles classes sont égales et leur union vaut simplement

$$P_J w^{-1} B = P_J w^{-1} U_w.$$

L'inclusion (24) devient une égalité puisqu'en rappliquant s on obtient :

$$P_J w^{-1} U_w = P_J w^{-1} U_w s^2 \subseteq P_J w^{-1} U_w s \subseteq P_J w^{-1} U_w.$$

Pour finir, $P_J w^{-1} B$ est bien entendu invariant par translation à droite par U_s.

Attaquons nous à (b). On a dans un premier temps

$$P_J w^{-1} U_w s U_s = P_J w^{-1} B s U_s = P_J w^{-1} B s B.$$

Par définition de P_J, on obtient

$$P_J w^{-1} B s B = \bigcup_{v \in W_J} B v B w^{-1} B s B.$$

L'axiomatique des systèmes de Tits nous dit que $B w^{-1} B s B$ est exactement $B w^{-1} s B$ car on a

$$l(w^{-1} s) = l(sw) > l(w) = l(w^{-1})$$

par [Grosse-Klönne 2014, Lemma 1.3(a)]. On termine alors :

$$P_J w^{-1} B s B = \bigcup_{v \in W_J} B v B w^{-1} s B = P_J w^{-1} s B = P_J w^{-1} s U_{sw}.$$

Enfin pour (c), on remarque d'abord que l'on a

$$(s(sw)^J)^J = w^J = w \quad \text{et} \quad l((sw)^J) < l(w).$$

Par [Grosse-Klönne 2014, Lemma 1.4(c)], on a $l(sw) < l(w)$ et donc $w^{-1}(\beta) \in \Phi^-_{\mathrm{red}}$. On observe aussi

$$s^{-1} U_{sw} s = s^{-1} U s \cap w U^- w^{-1} = \prod_{\substack{s(\alpha) \in \Phi^+_{\mathrm{red}} \\ w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-_{\mathrm{red}}}} U_\alpha.$$

Or on a (voir Proposition 1.4 de [Humphreys 1992])

$$s(\Phi^+_{\mathrm{red}}) = (\Phi^+_{\mathrm{red}} \setminus \{\beta\}) \cup \{-\beta\}, \quad w^{-1}(-\beta) \in \Phi^+_{\mathrm{red}}.$$

Il en résulte que la condition sur les indices du produit se réécrit

$$\alpha \in \Phi^{+}_{\mathrm{red}} \smallsetminus \{\beta\}, \quad w^{-1}(\alpha) \in \Phi^{-}_{\mathrm{red}};$$

et on en déduit $s^{-1}U_{sw}s = U'$. Cela implique directement $U's = sU_{sw}$ et comme on a

$$u \in U_s \subseteq B, \quad P_J w^{-1} s U_{sw} = P_J w^{-1} s B,$$

la dernière égalité en découle. Pour la première égalité, écrivons l'inclusion (le détail est identique au (b))

$$P_J w^{-1} U_w s \subseteq P_J w^{-1} U_w \cup P_J w^{-1} s U_{sw};$$

cette union est disjointe car on a $swW_J \neq wW_J$. De l'égalité $P_J w^{-1} U's = P_J w^{-1} s U_{sw}$ que l'on vient de prouver, et parce que le produit $P_J w^{-1} U_w$ est direct, on déduit

$$P_J w^{-1}(U_w \smallsetminus U')s \subseteq P_J w^{-1} U_w.$$

Lorsque u est un élément de $U_s \smallsetminus \{1\} = U_\beta \smallsetminus \{1\} \subseteq U_w$, on a l'inclusion $U'u \subseteq U_w \smallsetminus U'$; il s'ensuit

$$P_J w^{-1} U' u s U_s \subseteq P_J w^{-1}(U_w \smallsetminus U') s U_s \subseteq P_J w^{-1} U_w U_s = P_J w^{-1} U_w.$$

Voyons l'inclusion inverse : par [Carter 1985, Corollary 2.6.2], il existe $u_1 \in U_s$ et $b \in U_s T \subseteq B$ tel que l'on ait la décomposition $sus = bsu_1$. On a alors

$$P_J w^{-1} s B s u s U_s = P_J w^{-1} s B s U_s = P_J w^{-1} s B s B.$$

Il s'ensuit que

$$P_J w^{-1} U' = P_J w^{-1} s U_{sw} s = P_J w^{-1} s B s$$

est inclus dans

$$P_J w^{-1} s B s u s U_s = P_J w^{-1} s U_{sw} s u s U_s = P_J w^{-1} U' u s U_s.$$

Au final, on a bien l'égalité voulue (grâce à $U_w = U'U_s$) □

Le cas fini peut se voir de manière similaire au cas p-adique traité dans le lemme 5.7 : le R-module $C(P_J \backslash G, R)$ est libre et une base est donnée par les fonctions g_w pour w parcourant W^J. On tâche d'investiguer sa structure en tant que $\mathscr{H}_R(G, B)$-module à droite lorsque R est de caractéristique p.

Lemme 7.2. *Soient $w \in W^J$ et $s \in S$.*

(a) *Si $(sw)^J = w$, alors on a $g_w T_s = 0$.*

(b) *Si $l((sw)^J) > l(w)$, alors on a $g_w T_s = g_{(sw)^J}$.*

(c) *Si $l((sw)^J) < l(w)$, alors on a $g_w T_s = -g_w$.*

Démonstration. Le (a) est conséquence immédiate de (23), du lemme 7.1(a) et de l'égalité $|U_s| = 0$ dans R de caractéristique p (voir [Carter 1985, page 74]). Le (b) suit de (23) et de la décomposition en produit direct du lemme 7.1(b) aussi.

Intéressons nous au (c) : on utilise la décomposition en produit direct $U_w = U'U_s$. On a alors

$$g_w T_s = \sum_{u\in U_s} \sum_{u'\in U_s} \mathrm{id}_{P_J w^{-1} U' u' s u} = \sum_{u\in U_s} \mathrm{id}_{P_J w^{-1} U' s u} + \sum_{u\in U_s} \sum_{u'\neq 1} \mathrm{id}_{P_J w^{-1} U' u' s u}\,.$$

Par le lemme 7.1(c) et $|U_s| = 0$ dans R, le premier terme vaut 0 et le second

$$\sum_{u'\in U_s\smallsetminus\{1\}} \mathrm{id}_{P_J w^{-1} U_w} = -g_w.$$

Le lemme en découle. □

Les actions précédemment étudiées dans $(\mathrm{Ind}_B^G \mathrm{id})^B$ sont compatibles à celles du quotient $(\mathrm{St}_J\, R)^B$.

Proposition 7.3. *Supposons R de caractéristique p. Tout sous-$\mathcal{H}_R(G, B)$-module non nul de $(\mathrm{St}_J\, R)^B$ contient l'élément $\bar{g}_{z^J}$ de $\mathrm{St}_J\, R$, où z^J désigne l'élément de longueur maximale* [15] *de W^J.*

Démonstration. Soit E un sous-$\mathcal{H}_R(G, B)$-module non nul de $(\mathrm{St}_J\, R)^B$. Par la proposition 6.2, E contient un élément non nul

$$h = \sum_{w\in W^J_{\mathrm{pr}}} \alpha_w(h)\bar{g}_w \quad \text{avec } \alpha_w(h) \in R.$$

On fixe une énumération $w_1, w_2, \dots$ des éléments de W^J_{pr} vérifiant $w_j <_J w_i \Rightarrow i < j$: en particulier, on a $w_1 = z^J$. On veut montrer qu'il existe $h \in E$ non nul tel que

$$t(h) := \min\{i \geq 1 \mid \forall j > i,\ \alpha_{w_j}(h) = 0\}$$

soit égal à 1, c'est-à-dire $\bar{g}_{z^J} \in E$. Supposons le contraire et donc on a

$$t := \min\{t(h) \mid h \in E \smallsetminus \{0\}\} \geq 2.$$

Par [Grosse-Klönne 2014, Lemma 1.5], il existe $w' \in W^J_{\mathrm{pr}}$ et $s \in S$ tel que $w_t <_J w'$, $l((sw_t)^J) < l(w_t)$ et $l(w') \leq l((sw')^J)$. Par définition de $<_J$ (voir appendice B), il existe $s_1, \dots, s_r$ dans S tels que $w^{(i)} = (s_i \cdots s_1 w_t)^J$ vérifie $l(w^{(i)}) > l(w^{(i-1)})$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $w^{(r)} = w'$.

Soit $h \in E \smallsetminus \{0\}$ avec $t(h) = t$. Commençons par remarquer que, grâce au lemme 7.2, on a $\alpha_{w^{(r)}}(hT_s) = 0$. On peut donc considérer $h \in E \smallsetminus \{0\}$ avec $t(h) = t$

15. Un élément de longueur maximale est aussi maximal pour $<_J$ (voir l'appendice B pour la définition de $<_J$) par [Grosse-Klönne 2014, Lemma 1.4(d)]; l'existence d'un unique élément $<_J$-maximal est ensuite donnée par [Grosse-Klönne 2014, Lemma 1.4(e)].

et tel que $k(h) \geq 0$ est minimal, égal à k, où $k(h)$ est l'entier minimal de $[0, r]$ défini par $\alpha_{w^{(k(h))}}(h) = 0$. Si on a $k(h) = 0$, alors $\alpha_{w_t(h)}$ est nul, ce qui est contradictoire. On suppose ainsi $k > 0$, et on va le faire diminuer : considérons $h' = hT_{s_k}$, et observons

$$\alpha_{w^{(k-1)}}(h') = -\alpha_{w^{(k)}}(h) = 0, \quad \alpha_{w^{(k)}}(h') = \alpha_{w^{(k-1)}}(h) \neq 0.$$

Ceci nous assure $h' \neq 0$ et $k(h') < k$. Cela contredit la minimalité de k et donc l'hypothèse initiale : on vient donc de montrer l'existence de $h \in E \smallsetminus \{0\}$ avec $t(h) = 1$. C'est le résultat voulu. □

8. Paramètres de Hecke–Satake et preuve du théorème 3.1

Soit R un corps de caractéristique p. On commence par étudier le K-socle d'une représentation de Steinberg généralisée.

Proposition 8.1. *Soit $J \subseteq \Delta$. Le K-socle de la Steinberg généralisée* $\mathrm{St}_J\, R$ *est irréductible.*

Démonstration. Soit V une sous-K-représentation irréductible de $\mathrm{St}_J\, R$. L'injection de la proposition 6.2 nous permet de voir $V^{U\cap K}$ comme un sous-espace de

$$(\mathrm{St}_J\, R)^{I(1)} = (\mathrm{St}_J\, R)^{I} \simeq (\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R)^{\bar{B}}$$

(voir début de preuve du corollaire 5.9) ; de cette manière, $V^{U\cap K} = V^{B\cap K}$ est une droite stable par l'action de $\mathcal{H}_R(\bar{G}, \bar{B})$. Or, par la proposition 7.3, tout sous-$\mathcal{H}_R(\bar{G}, \bar{B})$-module non nul de $(\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R)^{\bar{B}}$ contient l'image $\bar{g}_J$ de l'élément

$$g_J := \mathrm{id}_{\bar{P}_J z^J \bar{B}} \in \mathrm{Ind}_{\bar{P}_J}^{\bar{G}}\, \mathrm{id}$$

dans $\overline{\mathrm{St}}_{\bar{J}} R$. Ainsi V est généré par $\bar{g}_J$ en tant que K-représentation, et le K-socle de $\mathrm{St}_J\, R$ est irréductible. □

Soit V une K-représentation irréductible. On va noter $\mathcal{H}_R(G, K, V)$ l'algèbre de Hecke–Satake $\mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_K^G\, V)$. Les éléments de $\mathcal{H}_R(G, K, V)$ sont des opérateurs à support fini parmi les doubles classes $K\backslash G/K$, donc on va fixer un système de représentants dominants dans A (au sens qu'ils contractent B) que l'on notera Σ_+.

La transformée de Satake (voir [Henniart et Vignéras 2015, paragraphe 7.3]) est un isomorphisme de R-algèbres

$$\mathcal{S} : \mathcal{H}_R(G, K, V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_R^+(A, A\cap K, V_{U\cap K}) \tag{25}$$

où $\mathcal{H}_R^+(A, A\cap K, V_{U\cap K})$ désigne la sous-algèbre de $\mathcal{H}_R(A, A\cap K, V_{U\cap K})$ engendrée par les opérateurs portés par la classe $z(A\cap K)$ pour $z \in \Sigma_+$ quand ils existent.

Soit J un sous-ensemble de Δ. On va particulièrement s'intéresser au cas où V est V_J, l'unique K-représentation irréductible M_J-corégulière [16] telle que l'action de M_J sur la droite $(V_J)_{N_J \cap K}$ est triviale (par la Proposition 3.11 de [Henniart et Vignéras 2012]). Dans ce cas-là, en particulier, $V_{U \cap K}$ est la représentation triviale id de $A \cap K$ et toute classe $z(A \cap K)$ pour $z \in \Sigma_+$ porte un unique opérateur de Hecke τ_z de $\mathcal{H}_R^+(A, A \cap K, V_{U \cap K})$, envoyant z sur $\mathrm{id}_{V_{U \cap K}}$ (voir [Henniart et Vignéras 2015, paragraphe 7.3]) ; et ils en constituent une base en tant que R-espace vectoriel. De plus, l'algèbre $\mathcal{H}_R^+(A, A \cap K, \mathrm{id})$ est alors commutative et de type fini sur R (voir paragraphe 7.2 de [Henniart et Vignéras 2015]). On en déduit alors que $\mathcal{H}_R(G, K, V_J)$ est aussi commutative et de type fini par l'isomorphisme de Satake (25).

Soit π une G-représentation admissible à coefficients dans R. Alors, comme $K(1)$ est un pro-p-groupe ouvert, le sous-espace des $K(1)$-invariants $\pi^{K(1)}$ est non nul et de dimension finie sur R. Il possède donc une sous-K-représentation irréductible V. En particulier, $\mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ est non trivial et de dimension finie. De plus, c'est un module à droite sur l'algèbre $\mathcal{H}_R(G, K, V)$.

On suppose à présent que V est un V_J pour un certain sous-ensemble J de Δ, et que R est algébriquement clos. Alors $\mathcal{H}_R(G, K, V_J)$ étant commutative, elle possède un sous-espace propre associé à un caractère $\chi : \mathcal{H}_R(G, K, V_J) \to R$ dans son action sur $\mathrm{Hom}_K(V_J, \pi)$. Dit autrement, on a un morphisme non nul de G-représentations

$$\mathrm{ind}_K^G V_J \otimes_{\mathcal{H},\chi} R \to \pi.$$

On tâche de déterminer les caractéristiques d'un tel caractère χ lorsque π est $\mathrm{St}_J R$. Pour être précis, notons $\chi^{(A)}$ la composée

$$\mathcal{H}_R^+(A, A \cap K, (V_J)_{U \cap K}) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{S}^{-1}} \mathcal{H}_R(G, K, V_J) \xrightarrow{\chi} R;$$

c'est $\chi^{(A)}$ que l'on va expliciter.

Proposition 8.2. *Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique p. Soit J un sous-ensemble de Δ.*

(i) *Le K-socle de* $\mathrm{St}_J R$ *s'identifie à V_J.*

(ii) *Il existe un morphisme non nul de G-représentations*

$$\mathrm{ind}_K^G V_J \otimes_{\mathcal{H},\chi} R \to \mathrm{St}_J R$$

si et seulement si $\chi^{(A)}$ est le caractère envoyant τ_z sur 1 *pour tout $z \in \Sigma_+$.*

Remarque. En particulier, $\mathrm{St}_J R$ n'est pas supersingulier au sens de [Henniart et Vignéras 2012].

16. Cela veut dire que le stabilisateur dans K de la représentation associée à $V_J^{U^- \cap K}$ est inclus dans $(P_J^- \cap K)K(1)$.

Démonstration. On note $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R(G, K, V_J)$ et $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_R(M_J, M_J \cap K, \mathrm{id})$. Soient $\chi : \mathcal{H} \to R$ et $\chi_M : \mathcal{H}_M \to R$ les caractères d'algèbres associés à $\chi^{(A)}$, caractère envoyant tout τ_z sur 1 (pour $z \in \Sigma_+$). Par [Henniart et Vignéras 2012, Theorem 1.2], parce que V_J est M_J-corégulière et que $(V_J)_{N_J \cap K}$ est la $(M_J \cap K)$-représentation triviale, on a un morphisme surjectif de G-représentations

$$\operatorname{ind}_K^G V_J \otimes_\chi R \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ind}_{P_J}^G (\operatorname{ind}_{M_J \cap K}^{M_J} \mathrm{id} \otimes_{\chi_M} R) \twoheadrightarrow \operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}\,. \tag{26}$$

On en déduit [17] l'existence d'un morphisme surjectif (en particulier non nul) de G-représentations $\operatorname{ind}_K^G V_J \otimes_\chi R \to \mathrm{St}_J R$. Il s'ensuit que V_J génère $\mathrm{St}_J R$ en tant que G-représentation. Parce que $\mathrm{St}_J R$ est de K-socle irréductible, V_J est l'unique K-représentation irréductible contenue dans $\mathrm{St}_J R$. Cela prouve (i) et le sens indirect de (ii).

Prouvons maintenant la seconde implication de (ii). Comme $K \cap P_J \backslash K \to P_J \backslash G$ est un homéomorphisme, on a par réciprocité de Frobenius

$$\operatorname{Hom}_K(V_J, \operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}) = \operatorname{Hom}_{K \cap P_J}(V_J, \mathrm{id})$$

et donc, puisque l'on a $(V_J)_{N_J \cap K} = \mathrm{id}$, on déduit

$$\operatorname{Hom}_K(V_J, \operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}) = \operatorname{Hom}_{K \cap M_J}(\mathrm{id}, \mathrm{id}).$$

Ce dernier espace est donc un R-espace vectoriel de dimension 1. Le morphisme surjectif $\operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id} \twoheadrightarrow \mathrm{St}_J R$ de G-représentations induit le morphisme

$$\psi : \operatorname{Hom}_K(V_J, \operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}) \to \operatorname{Hom}_K(V_J, \mathrm{St}_J R)$$

de R-espaces vectoriels. On vient de voir que $\operatorname{Hom}_K(V_J, \operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id})$ est de dimension 1, et $\operatorname{Hom}_K(V_J, \mathrm{St}_J R)$ est aussi de dimension 1 par (i) et lemme de Schur. De ce fait, ψ est un isomorphisme si et seulement si il est non nul. Or le fait que (26) induise $\operatorname{ind}_K^G V_J \otimes_\chi R \twoheadrightarrow \mathrm{St}_J R$ implique la non nullité de ψ : ψ est un isomorphisme.

Après application de la réciprocité de Frobenius, on a un isomorphisme

$$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{ind}_K^G V_J, \operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_G(\operatorname{ind}_K^G V_J, \mathrm{St}_J R)$$

de R-espaces vectoriels. Ce dernier est $\mathcal{H}_R(G, K, V_J)$-équivariant car ψ est juste induit par la projection définissant $\mathrm{St}_J R$. De ce fait, toute flèche non nulle $\operatorname{ind}_K^G V_J \otimes_{\mathcal{H},\chi} R \to \mathrm{St}_J R$ pour un certain χ se factorise à travers $\operatorname{ind}_K^G V_J \otimes_{\mathcal{H},\chi} R \to \operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}$. Et

17. Jusqu'à présent, hormis dans l'introduction, on a défini $\mathrm{St}_J R$ à partir des $C^\infty(P_J \backslash G, R)$. Remarquons que la définition peut se faire de manière équivalente à partir d'induites paraboliques : l'application R-linéaire $C^\infty(P_J \backslash G, R) \to \operatorname{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}$ est un isomorphisme car la projection canonique $G \to P_J \backslash G$ possède une section continue.

par le diagramme (4) de [Henniart et Vignéras 2012], l'isomorphisme de réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_K^G V_J, \mathrm{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{M_J}(\mathrm{ind}_{M_J \cap K}^{M_J} \mathrm{id}, \mathrm{id})$$

est $\mathcal{H}_R(G, K, V_J)$-équivariant, où l'action au but se fait à travers la transformée de Satake partielle

$$\mathcal{S}_G^{M_J} : \mathcal{H}_R(G, K, V_J) \hookrightarrow \mathcal{H}_R(M_J, M_J \cap K, \mathrm{id}).$$

Il s'agit donc de déterminer les valeurs propres de Hecke possibles pour l'action de $\mathcal{H}_R(M_J, M_J \cap K, \mathrm{id})$ sur $\mathrm{Hom}_{M_J}(\mathrm{ind}_{M_J \cap K}^{M_J} \mathrm{id}, \mathrm{id})$. Cet espace est unidimensionnel puisqu'il est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{M_J \cap K}(\mathrm{id}, \mathrm{id}) = \mathrm{Hom}_{A \cap K}(\mathrm{id}, \mathrm{id}) = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{ind}_{A \cap K}^A \mathrm{id}, \mathrm{id}),$$

et c'est à travers ce dernier que l'action de $\mathcal{H}_R(A, A \cap K, \mathrm{id})$ se lit naturellement. On conclut donc qu'elle se fait à travers le caractère $\chi^{(A)}$ envoyant chaque τ_z sur 1, d'où l'implication qu'il restait à prouver pour (ii). □

On exhibe de la preuve précédente le fait plus précis suivant, qui va facilement impliquer le théorème 3.1.

Corollaire 8.3. *Soient R un corps algébriquement clos de caractéristique p et J un sous-ensemble de Δ. Le K-socle V_J de $\mathrm{St}_J R$ l'engendre en tant que G-représentation.*

On a alors l'irréductibilité de $\mathrm{St}_J R$ dans le cas R algébriquement clos de caractéristique p comme suit. Soit $\pi \subseteq \mathrm{St}_J R$ une sous-représentation non nulle. Alors π contient une sous-K-représentation irréductible qui, par l'argument précédent, est donc V_J. Mais on sait que V_J génère $\mathrm{St}_J R$; donc on a $\pi = \mathrm{St}_J R$ et l'irréductibilité voulue.

Le théorème 3.1 en découle par le corollaire 5.9 et le fait tout à fait général que, si une représentation définie sur R est irréductible sur une clôture algébrique R^{alg}, alors elle l'est aussi sur R.

9. Induites paraboliques de Steinberg généralisées

Commençons par un mot sur la preuve du corollaire 3.2, notamment sur le fait que deux $J, J' \subseteq \Delta$ distincts engendrent des $\mathrm{St}_J R$ et $\mathrm{St}_{J'} R$ non isomorphes. Cela suit immédiatement de ce que l'on vient de faire puisque l'on a alors $V_J \neq V_{J'}$.

Définissons la filtration suivante sur $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \mathrm{id}$:

$$\mathrm{Fil}^i = \begin{cases} \sum_{J' \supseteq J,\, |J' \smallsetminus J| \geq i} \mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} & \text{pour } 0 \leq i \leq |\Delta \smallsetminus J|, \\ 0 & \text{pour } i > |\Delta \smallsetminus J|. \end{cases}$$

Et montrons que c'est la filtration par les cosocles de $\mathrm{Ind}_{P_J}^G$ id, c'est-à-dire la filtration descendante définie par $\mathrm{Fil}^0 = \mathrm{Ind}_{P_J}^G$ id et Fil^i est telle que $\mathrm{gr}^{i-1} := \mathrm{Fil}^{i-1} / \mathrm{Fil}^i$ est le cosocle de Fil^{i-1} pour $i \geq 1$. On a le diagramme commutatif suivant, pour $i \geq 0$ et $J' \supseteq J$ avec $|J' \smallsetminus J| = i$ (en particulier $i \leq |\Delta \smallsetminus J|$) :

$$\begin{tikzcd}
& \sum_{J'' \supsetneq J'} \mathrm{Ind}_{P_{J''}}^G \mathrm{id} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{St}_{J'} R \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Fil}^{i+1} \arrow[r] & \mathrm{Fil}^i \arrow[r] & \mathrm{gr}^i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si la flèche $\mathrm{St}_{J'} R \to \mathrm{gr}^i$ était triviale, cela voudrait dire que l'image de $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \hookrightarrow \mathrm{Fil}^i$ serait incluse dans Fil^{i+1}, ce qui serait absurde par le lemme 9.1 ultérieur. De ce fait, et parce que l'on a $\mathrm{St}_{J_1} R \not\simeq \mathrm{St}_{J_2} R$ pour $J_1 \neq J_2$, on a une injection

$$\bigoplus_{\substack{J' \supseteq J \\ |J' \smallsetminus J| = i}} \mathrm{St}_{J'} R \hookrightarrow \mathrm{gr}^i.$$

Pour voir que c'est bien le cosocle de Fil^i, comme on connaît les composantes de Jordan–Hölder de $\mathrm{Ind}_{P_J}^G$ id (ce sont les $\mathrm{St}_{J'} R$ pour $J' \supseteq J$, avec [18] multiplicité 1), il suffit de voir que toute flèche $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \to \mathrm{St}_{J''} R$ est triviale dès que l'on a $J'' \supsetneq J'$ ou $J'' \not\supseteq J'$. Le second cas est clair et on veut montrer que tout morphisme $f : \mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \to \mathrm{St}_{J''} R$ de G-représentations est trivial si $J'' \supsetneq J'$. Si ce n'était pas le cas, f serait surjectif par irréductibilité de $\mathrm{St}_{J''} R$, de noyau contenant $\mathrm{St}_{J'} R$. Mais comme $V_{J'} \subseteq (\mathrm{St}_{J'} R)|_K$ génère $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G$ id par (26), toute injection $\mathrm{St}_{J'} R \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G$ id se doit d'être un isomorphisme. C'est absurde, donc f est nul et $\mathrm{St}_{J'} R$ est bien le plus gros quotient semi-simple de $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G$ id. Il en résulte que $(\mathrm{Fil}^i)_i$ est bien la filtration par les cosocles comme annoncé.

Lemme 9.1. *Soient $J \subseteq \Delta$ un ensemble, $i \in [0, |\Delta \smallsetminus J|]$ un entier et $J' \supseteq J$ un sous-ensemble de Δ avec $|J' \smallsetminus J| = i$. Alors l'image de* $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \hookrightarrow \mathrm{Fil}^i$ *n'est pas incluse dans* Fil^{i+1}.

Démonstration. Le cas $i = 0$ résulte de ce que $\mathrm{St}_J R$ est non triviale. On suppose donc à présent $i \geq 1$.

18. Ce sont les telles représentations de Steinberg comme on peut le voir par récurrence descendante sur $|J|$ à partir de la définition des $\mathrm{St}_{J'} R$. La décomposition $G = \bigsqcup_{w \in W^J} P_J w^{-1} B$ fait que les restrictions respectives de $C^\infty(P_J \backslash G, R)$ et $\mathrm{St}_J R$ à B possèdent des filtrations telles que $\bigoplus_i \mathrm{gr}^i$ sont respectivement égales à

$$\bigoplus_{w \in W^J} C^\infty(P_J \backslash P_J w^{-1} B, R) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{w \in W^J_{\mathrm{pr}}} C^\infty(P_J \backslash P_J w^{-1} B, R).$$

Comme on a de plus $W^J = \bigsqcup_{J' \supseteq J} W^{J'}_{\mathrm{pr}}$, les $\mathrm{St}_{J'} R$ apparaissent avec multiplicité 1 comme voulu.

Supposons par l'absurde que $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id}$ est incluse dans Fil^{i+j} pour un $j \geq 1$ maximal, c'est-à-dire avec $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \nsubseteq \mathrm{Fil}^{i+j+1}$ (un tel j existe bien puisque la filtration devient nulle au bout d'un certain rang). On commence par établir

$$\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} = (\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \cap \mathrm{Fil}^{i+j+1}) + \sum_{J'' \supsetneq J'} \mathrm{Ind}_{P_{J''}}^G \mathrm{id}\,. \tag{27}$$

Soit f un élément de

$$\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \Big/ \Big((\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \cap \mathrm{Fil}^{i+j+1}) + \sum_{J'' \supsetneq J'} \mathrm{Ind}_{P_{J''}}^G \mathrm{id} \Big),$$

que l'on voit dans

$$\mathcal{F} = \mathrm{Fil}^{i+j} \Big/ \Big((\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \cap \mathrm{Fil}^{i+j+1}) + \sum_{J'' \supsetneq J'} \mathrm{Ind}_{P_{J''}}^G \mathrm{id} \Big).$$

Alors f s'écrit $\sum_{J''} f_{J''}$ où les J'' parcourent les $J'' \supseteq J$ avec $|J'' \smallsetminus J| \geq i + j$, $J'' \nsupseteq J'$ et $f_{J''}$ appartient à l'image de $\mathrm{Ind}_{P_{J''}}^G \mathrm{id}$ dans $\mathcal{F}$. On prend ensuite un $\alpha \in J' \smallsetminus J$ (cet ensemble est non vide car i est non nul) et $s \in W_{J'}$ la réflexion correspondante. Parce que l'on a $J' \nsubseteq J''$, et que l'on a quotienté par $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \cap \mathrm{Fil}^{i+j+1}$, l'écriture $f = \sum f_{J''}$ est en fait invariante à gauche par s. En effectuant de même pour toute racine de $J' \smallsetminus J$, on voit que chaque $f_{J''}$ est en fait nulle dans $\mathcal{F}$ (car $j \geq 1$), ce qui donne la nullité de f. Et donc (27) comme annoncé : mais cela implique que l'on a une surjection naturelle $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \cap \mathrm{Fil}^{i+j+1} \twoheadrightarrow \mathrm{St}_{J'} R$. De ce fait, ou bien il existe un $J'' \supsetneq J'$ avec $\mathrm{Ind}_{P_{J''}}^G \mathrm{id} \nsubseteq \mathrm{Fil}^{i+j+1}$, ce qui est exclu par l'inclusion $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \subseteq \mathrm{Fil}^{i+j}$. Ou bien $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id} \cap \mathrm{Fil}^{i+j+1}$ est tout $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id}$, c'est-à-dire que $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G \mathrm{id}$ est inclus dans Fil^{i+j+1}, ce qui contredit la maximalité de $j \geq 1$. Toutes les possibilités amènent à des contradictions : le lemme est prouvé. ☐

Corollaire 9.2. *Soient $J' \subseteq J$ des sous-ensembles de Δ. Alors la représentation*[19] $\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\mathrm{St}_{J'}^{M_J} R)$ *est de longueur finie, de constituants de Jordan–Hölder les* $\mathrm{St}_{J''} R$ *avec $J'' \subseteq \Delta$ vérifiant $J \cap J'' = J'$, chacun apparaissant avec multiplicité* 1.

Démonstration. Commençons tout d'abord par remarquer que, puisque l'on a $J' \subseteq J$, la condition $J \cap J'' = J'$ est équivalente à $J'' \supseteq J'$ et $J \smallsetminus J' \subseteq \Delta \smallsetminus J''$. C'est sous cette seconde forme que nous allons l'utiliser au cours du raisonnement qui suit.

Prouvons-le par récurrence descendante sur $J' \subseteq J$. L'étape d'initiation $J' = J$ est juste le corollaire 3.2. Soit $J' \neq J$ et supposons le résultat vrai pour tout parabolique $J_0 \subseteq J$ contenant strictement J'. Par définition de la représentation de Steinberg généralisée, on a une suite exacte de M_J-représentations

$$0 \to \mathrm{Ker} \to \mathrm{Ind}_{P_{J'}}^{M_J} \mathrm{id} \to \mathrm{St}_{J'}^{M_J} R \to 0, \tag{28}$$

19. Où on note $\mathrm{St}_{J'}^{M_J} R$ une représentation de Steinberg généralisée du groupe réductif M_J.

où Ker est par là-même définie et a constituants de Jordan–Hölder les St_{J_0} id pour $J' \subsetneq J_0 \subseteq J$ par le corollaire 3.2. Appliquons le foncteur exact $\mathrm{Ind}_{P_J}^G$ (voir [Vignéras 2012a, Proposition 1.1]) à (28) pour obtenir :

$$0 \to \mathrm{Ind}_{P_J}^G(\mathrm{Ker}) \to \mathrm{Ind}_{P_J}^G(\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^{M_J}\,\mathrm{id}) \to \mathrm{Ind}_{P_J}^G(\mathrm{St}_{J'}^{M_J}\,R) \to 0.$$

Comme on a

$$M_J/(M_J \cap P_{J'}) \xrightarrow{\sim} M_J B/(M_J \cap P_{J'})B = P_J/(M_J \cap P_{J'})B = P_J/P_{J'}$$

par décomposition de Levi, le terme central est $\mathrm{Ind}_{P_{J'}}^G$ id, de constituants de Jordan–Hölder les $\mathrm{St}_{J''}\,R$ avec $J'' \supseteq J'$ par le corollaire 3.2. Par hypothèse de récurrence, les constituants de $\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\mathrm{Ker})$ sont les $\mathrm{St}_{J''}\,R$ avec $J'' \subseteq \Delta$ vérifiant $J'' \supseteq J_0$ et $J \smallsetminus J_0 \subseteq \Delta \smallsetminus J''$ pour un certain $J' \subsetneq J_0 \subseteq J$.

Mais alors, soit J'' tel que $\mathrm{St}_{J''}\,R$ est un constituant de Jordan–Hölder de $\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\mathrm{St}_{J'}^{M_J}\,R)$. On a $J'' \supsetneq J'$, et aussi, $J \smallsetminus J' \subseteq \Delta \smallsetminus J''$. En effet, supposons cette seconde inclusion fausse, c'est-à-dire $J'' \cap (J \smallsetminus J') \neq \varnothing$: on considère $J_0 \subseteq \Delta$ avec

$$J_0 := J' \cup \big(J'' \cap (J \smallsetminus J')\big) \supsetneq J'$$

et on a $J_0 \subseteq J''$, $J \smallsetminus J_0 \subseteq \Delta \smallsetminus J''$, donc $\mathrm{St}_{J''}\,R$ apparaît déjà dans $\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\mathrm{Ker})$ par l'assertion de multiplicité 1 dans le corollaire 3.2. C'est absurde. Enfin, la décomposition disjointe (qu'il est plus facile de voir avec la condition équivalente $J \cap J'' = J'$ dans le terme de droite)

$$\{J'' \supseteq J'\} = \bigsqcup_{J_0 \supseteq J'} \{J'' \supseteq J_0 \mid J \smallsetminus J_0 \subseteq \Delta \smallsetminus J''\}$$

nous permet de dire que ce sont les seuls constituants qui interviennent. La récurrence est terminée. □

Appendice A: De la liberté de $C^\infty(X, \mathbb{Z})$

Parce qu'on se sert constamment du fait suivant, on se permet de rappeler sa preuve probablement bien connue.

Pour X un espace topologique, on note $\mathcal{U}$ la famille des recouvrements de X par un nombre fini d'ouverts disjoints. On remarque que $\mathcal{U}$ un ensemble ordonné par $U \leq V$ si pour tout $A \in U$ il existe des $B_i \in V$ vérifiant $A = \bigcup B_i$.

Lemme A.1. *Soit X un espace topologique compact et totalement discontinu. Supposons que $\mathcal{U}$ possède un sous-ensemble $\mathcal{V}$ dénombrable et cofinal. Alors l'espace $C^\infty(X, \mathbb{Z})$ des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre.*

Remarque. Par changement de base $\mathbb{Z} \to R$, si R est un anneau commutatif unitaire, $C^\infty(X, R)$ est alors aussi un R-module libre.

Démonstration. Que $C^\infty(X, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module est évident ; il s'agit de voir qu'il est libre. Soit f un élément de $C^\infty(X, \mathbb{Z})$. Pour tout $x \in X$, on fixe un ouvert V_x contenant x tel que f est constant sur V_x. Le compact X est alors recouvert par les V_x pour x parcourant X. Par compacité, on peut en extraire un recouvrement fini $X = \bigcup X_i$ par des ouverts X_i sur lesquels f est constant. Si X_i et X_j sont non disjoints, on peut les remplacer par $X_i \cap X_j$, $X_i \smallsetminus X_i \cap X_j$ et $X_j \smallsetminus X_i \cap X_j$, qui sont trois ouverts deux à deux disjoints d'union $X_i \cup X_j$. En répétant le procédé, on peut supposer que l'union $X = \bigcup X_i$ est une union finie disjointe.

On note que $\mathcal{U}$ est filtrant puisque si $U, V \in \mathcal{U}$, on peut, à partir du procédé précédent appliqué à $U \cup V$, obtenir un recouvrement W vérifiant $U \leq W$ et $V \leq W$. Pour tout $U = \{X_i\}$ élément de $\mathcal{U}$, on note $C_{(U)}(X, \mathbb{Z})$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $C^\infty(X, \mathbb{Z})$ constitué des fonctions constantes sur chaque X_i. On vient de voir que tout élément de $C^\infty(X, \mathbb{Z})$ vit dans un $C_{(U)}(X, \mathbb{Z})$ pour un $U \in \mathcal{U}$ convenable. Et si on considère les flèches d'inclusion $C_{(U)}(X, \mathbb{Z}) \to C_{(V)}(X, \mathbb{Z})$ pour $U \leq V$, on obtient un système inductif et on écrit $C^\infty(X, \mathbb{Z})$ comme limite inductive de modules libres :

$$C^\infty(X, \mathbb{Z}) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} C_{(U)}(X, \mathbb{Z}) \simeq \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{Z}^{|U|}.$$

On se sert de l'hypothèse sur $\mathcal{U}$ et on peut numéroter un sous-ensemble cofinal $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ (quitte à enlever des éléments du $\mathcal{V}$ de l'énoncé) $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en respectant l'ordre : on demande $V_i \leq V_j \Rightarrow i \leq j$. On réécrit alors

$$C^\infty(X, \mathbb{Z}) = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}} C_{(V)}(X, \mathbb{Z}) = \varinjlim_{n} \sum_{k \leq n} C_{(V_k)}(X, \mathbb{Z}).$$

On construit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ une base de $C_n := \sum_{k \leq n} C_{(V_k)}(X, \mathbb{Z})$. L'étape d'initiation $n = 0$ consiste simplement à choisir une base $(b_0, \ldots, b_{i_0})$ du $\mathbb{Z}$-module libre $C_{(V_0)}(X, \mathbb{Z})$. Supposons que l'on a construit une base $(b_0, \ldots, b_{i_n})$ de C_n. Parce que $C_n \cap C_{(V_{n+1})}(X, \mathbb{Z})$ est un $C_{(V'_{n+1})}(X, \mathbb{Z})$ pour un certain $V'_{n+1} \leq V_{n+1}$ (V'_{n+1} non nécessairement dans $\mathcal{V}$), $C_{(V_{n+1})}(X, \mathbb{Z})/\big(C_n \cap C_{(V_{n+1})}(X, \mathbb{Z})\big)$ est sans torsion. Alors C_n est un facteur direct du $\mathbb{Z}$-module libre C_{n+1}. On peut alors compléter $(b_0, \ldots, b_{i_n})$ en une base $(b_0, \ldots, b_{i_{n+1}})$ de C_{n+1}. La récurrence est alors prouvée et le résultat suit. □

Appendice B: Sur l'ordre $<_J$

On rappelle la définition de $<_J$ introduit dans [Grosse-Klönne 2014] : pour $w, w' \in W^J$, on note $w <_J w'$ s'il existe $s_1, \ldots, s_r \in S$ tels que $w^{(i)} = (s_i s_{i-1} \cdots s_1 w)^J$ vérifie $l(w^{(i)}) > l(w^{(i-1)})$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $w^{(r)} = w'$.

On établit la caractérisation suivante de $<_J$, qui dit en particulier que $<_J$ est un raffinement de la restriction à W^J de l'ordre fort dans un groupe de Coxeter fini.

Proposition B.1. *Soient $w, w' \in W^J$. On a $w <_J w'$ si et seulement si il existe $s_1, \dots, s_r \in S$ tels que $w^{(i)} = s_i \cdots s_1 w$ soit un élément de W^J de longueur $l(w)+i$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $w^{(r)} = w'$.*

Remarque. Le cas $r = 1$ est déjà présent dans [Grosse-Klönne 2014, Lemma 1.4(b)].

Démonstration. Le sens ($\Leftarrow$) est immédiat puisque $w \in W^J$ implique $w^J = w$. Supposons donc $w <_J w'$ et prenons $s_1, \dots, s_r$ comme dans la définition de $<_J$. Prouvons d'abord $s_1 w \in W^J$ avec $l(s_1 w) = l(w) + 1$. On a

$$l(w) < l((s_1 w)^J) \leq l(s_1 w) \leq l(w) + 1,$$

où la première inégalité suite de la définition de $<_J$ et la deuxième de celle de W^J. Mais alors, on a $l((s_1 w)^J) = l(s_1 w) = l(w) + 1$. Cela dit en particulier que $s_1 w$ est de longueur minimale dans $s_1 w W_J$ et on a $(s_1 w)^J = s_1 w \in W^J$. Par une récurrence immédiate, $w^{(i)} = s_i \cdots s_1 w$ est un élément de W^J de longueur $l(w) + i$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Le résultat est prouvé. □

Appendice C: De l'irréductibilité de la Steinberg généralisée dans le cas fini

Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique p. Le travail effectué nous permet de découvrir ou redécouvrir quelques résultats sur les Steinberg généralisées pour un groupe réductif fini $\overline{G}$.

Proposition C.1. *La plus grande sous-$\overline{G}$-représentation irréductible de $\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$ est V_J.*

Remarque. En particulier, si $\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$ est irréductible, alors on a $V_J = \overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$.

Démonstration. On a une inclusion $\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R \subseteq \mathrm{St}_J\, R$, et on sait que le K-socle de $\mathrm{St}_J\, R$ est irréductible, égal à V_J : V_J est donc aussi le K-socle de $\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$. Comme $K(1)$ agit trivialement sur $V_J \subseteq \overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$ et $\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$, le résultat se traduit en termes de $\overline{G}$-représentations. □

Proposition C.2. *Supposons $\overline{\Phi}_{\mathrm{red}}$ irréductible et $\overline{J} \notin \{\varnothing, \overline{\Delta}\}$. Alors $\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R$ n'est pas irréductible.*

Remarque. $\mathrm{St}_{\overline{\Delta}}\, R = \mathrm{id}$ est bien sûr irréductible ; quant à la Steinberg $\mathrm{St}_{\varnothing}\, R$, en utilisant [Cabanes et Enguehard 2004, Theorem 6.10, Theorem 6.12 et Definition 6.13], on voit qu'elle est aussi irréductible.

Démonstration. Par [Cabanes et Enguehard 2004, Theorem 6.12], si V est une $\overline{G}$-représentation irréductible alors son espace de $\overline{U}$-invariants est de dimension 1. De ce fait, si V est une représentation avec $\dim V^{\overline{U}} \geq 2$, alors V n'est pas irréductible. Par les propositions 5.8 et 6.2, et le début de la preuve du corollaire 5.9, $(\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R)^{\overline{U}} = (\overline{\mathrm{St}}_{\overline{J}} R)^{\overline{B}}$ est un R-espace vectoriel de dimension $|W^J_{\mathrm{pr}}|$. Il s'agit d'examiner la cardinalité de W^J_{pr} et le résultat suit par le lemme C.3. □

Lemme C.3. *Supposons* Φ_{red} *irréductible. Alors on a* $|W_{\mathrm{pr}}^J| \geq 1$, *avec égalité si et seulement si* J *est* $\varnothing$ *ou* Δ.

Démonstration. Rappelons la définition suivante de W_{pr}^J :

$$W_{\mathrm{pr}}^J = \{w \in W \mid \forall \alpha \in J,\ l(ws_\alpha) > l(w)\ ;\ \forall \beta \in \Delta \smallsetminus J,\ l(ws_\beta) < l(w)\}.$$

Notons $w_{\Delta \smallsetminus J}$ l'élément le plus long de $W_{\Delta \smallsetminus J}$. C'est un élément de W_{pr}^J, et de ce fait on a la minoration voulue. Il reste à déterminer le cas d'égalité. D'abord, on remarque $W_{\mathrm{pr}}^{\varnothing} = \{w_\Delta\}$ et $W_{\mathrm{pr}}^{\Delta} = \{1\}$, de sorte qu'on veut maintenant montrer que si J n'est pas $\varnothing$ ou Δ, alors W_{pr}^J contient un autre élément que $w_{\Delta \smallsetminus J}$.

Supposons $J \neq \varnothing, \Delta$. On cherche un élément $w \in W_J \smallsetminus \{1\}$ vérifiant

$$l(ww_{\Delta \smallsetminus J}s_\alpha) > l(ww_{\Delta \smallsetminus J})$$

pour tout $\alpha \in J$. Parce que Φ_{red} est irréductible, on peut choisir $\beta \in J$ tel que $(\Delta \smallsetminus J) \cup \{\beta\}$ engendre un sous-système de Φ_{red} avec au plus autant de composantes irréductibles que celui engendré par $\Delta \smallsetminus J$. Montrons que s_β est l'élément $w \in W^J \smallsetminus \{1\}$ cherché.

En effet, remarquons d'abord que l'on a

$$l(w_{\Delta \smallsetminus J}) = l(s_\beta w_{\Delta \smallsetminus J} s_\alpha) < l(s_\beta w_{\Delta \smallsetminus J})$$

pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus J$. Ensuite, supposons qu'il existe un élément $\gamma \in J$ avec $l(s_\beta w_{\Delta \smallsetminus J} s_\gamma) < l(s_\beta w_{\Delta \smallsetminus J})$, alors cela veut dire que $s_\beta w_{\Delta \smallsetminus J}$ possède une écriture qui se termine par s_γ, disons $w's_\gamma$ avec $l(w') = l(w_{\Delta \smallsetminus J})$ et w' ne se terminant pas par s_γ. Maintenant on a $W_J w_{\Delta \smallsetminus J} W_J = W_J w' W_J$, ce qui force $w' = w_{\Delta \smallsetminus J}$. Cela implique $s_\gamma = w_{\Delta \smallsetminus J} s_\beta w_{\Delta \smallsetminus J} \in \mathrm{W}_{(\Delta \smallsetminus J) \cup \{\beta\}}$ et donc $\gamma = \beta$. Mais dans ce cas-là, c'est que $s_\beta w_{\Delta \smallsetminus J}$ est l'élément le plus long de $W_{(\Delta \smallsetminus J) \cup \{\beta\}}$. Mais on sait aussi que la longueur de $w_{(\Delta \smallsetminus J) \cup \{\beta\}}$ est égale à $|\Phi^+_{(\Delta \smallsetminus J) \cup \{\beta\}}|$ [Humphreys 1992, I.4.8], et on a alors

$$|\Phi^+_{(\Delta \smallsetminus J) \cup \{\beta\}}| = |\Phi^+_{(\Delta \smallsetminus J)}| + 1.$$

Il s'ensuit

$$\Phi^+_{(\Delta \smallsetminus J) \cup \{\beta\}} = \Phi^+_{(\Delta \smallsetminus J)} \sqcup \{\beta\}$$

et cela contredit le fait que $\Phi_{(\Delta \smallsetminus J) \cup \{\beta\}}$ a moins (éventuellement le même nombre) de composantes irréductibles que $\Phi_{\Delta \smallsetminus J}$. C'est absurde, et le résultat est prouvé. $\square$

Remarque. Marie-France Vignéras nous fait remarquer que l'élément $z^J = w_\Delta w_J \in W^J$ de la proposition 7.3 convient aussi en tant qu'élément distinct de $w_{\Delta \smallsetminus J}$ dans W_{pr}^J (voir aussi [Grosse-Klönne 2014, Lemma 1.4(e)]). En effet, il est de longueur maximale $|\Phi^+| - |\Phi_J^+| \neq |\Phi^+_{\Delta \smallsetminus J}|$ et est donc différent de $w_{\Delta \smallsetminus J}$. Et sa longueur excède aussi celle de tout élément de $W^{J'}$ pour $J' \supsetneq J$ et il est donc primitif.

Appendice D: Représentations de Steinberg généralisées pour le groupe dérivé

Dans cette section uniquement, on distinguera le groupe réductif $\underline{G}$ défini sur F de ses F-points $G = \underline{G}(F)$. De même, B et P seront respectivement les F-points de $\underline{B}$ et $\underline{P}$.

On note $\underline{D}(G)$ le groupe dérivé de G, c'est-à-dire le faisceau fppf des commutateurs de $\underline{G}$. C'est un groupe semi-simple (voir [Demazure 2011a, Théorème 6.2.1(iv)]) et on notera $D(G)$ pour son groupe des F-points. Le but de ce paragraphe est de comparer les représentations de Steinberg généralisées pour G et pour $D(G)$.

Soient R un corps de caractéristique p et $J \subseteq \Delta$. Pour les distinguer, on notera $\mathrm{St}_J^{(G)} R$ et $\mathrm{St}_J^{(D(G))} R$ la représentation de Steinberg généralisée respectivement pour G et $D(G)$, par rapport à J.

Proposition D.1. *La restriction de* $\mathrm{St}_J^{(G)} R$ *à* $D(G)$ *est isomorphe à* $\mathrm{St}_J^{(D(G))} R$.

A partir de là, on peut utiliser tout la machinerie de cet article pour $\underline{D}(G)$ et en déduire l'irréductibilité de $\mathrm{St}_J^{(D(G))} R$; automatiquement $\mathrm{St}_J^{(G)} R$ est aussi irréductible.

Démonstration de la proposition D.1. Le groupe $\underline{B} \cap \underline{D}(G)$ est un parabolique minimal de $\underline{D}(G)$ (voir [Demazure 2011a, Proposition 6.2.8(ii)]), et on appelle standard un parabolique de $\underline{D}(G)$ contenant $\underline{B} \cap \underline{D}(G)$. La flèche $\underline{P} \mapsto \underline{P} \cap \underline{D}(G)$ est une bijection entre l'ensemble des paraboliques standards de $\underline{G}$ et celui des paraboliques standards de $\underline{D}(G)$. Soient $\underline{P}$ un parabolique standard de $\underline{G}$ et $J \subseteq \Delta$ l'ensemble vérifiant $\underline{P} = \underline{P}_J$. On veut voir que l'injection $P \cap D(G) \backslash D(G) \hookrightarrow P \backslash G$ est une bijection. Pour cela, utilisons la décomposition de Bruhat pour $D(G)$:

$$P \cap D(G) \backslash D(G) = \bigsqcup_{w \in W^J} P \cap D(G) \backslash (P \cap D(G)) w^{-1} (B \cap D(G)),$$

où on a relevé chaque $w \in W^J$ en un élément de $D(G)$. En notant que $U_w = U \cap wU^- w^{-1}$ est inclus dans $D(G)$, elle se réécrit encore

$$P \cap D(G) \backslash D(G) = \bigsqcup_{w \in W^J} P \cap D(G) \backslash (P \cap D(G)) w^{-1} U_w. \tag{29}$$

De même, pour G on écrit (en gardant les mêmes relèvements pour W^J)

$$P \backslash G = \bigsqcup_{w \in W^J} P \backslash P w^{-1} B = \bigsqcup_{w \in W^J} P \backslash P w^{-1} U_w. \tag{30}$$

La comparaison de (30) et de (29) nous donne que $P \cap D(G) \backslash D(G) \hookrightarrow P \backslash G$ est surjective, et donc bijective.

De ce fait, la restriction à $D(G)$ de l'induite Ind_P^G id est $\mathrm{Ind}_{P\cap D(G)}^{D(G)}$ id. Par définition (18), la restriction à $D(G)$ de $\mathrm{St}_J^{(G)}\, R$ s'identifie à $\mathrm{St}_J^{(D(G))}\, R$. □

Remerciements

Ce travail est une partie de ma thèse de doctorat, réalisée sous la direction de Marie-France Vignéras. Je lui suis infiniment reconnaissant pour les questions et remarques qu'elle a pu me communiquer pendant la préparation de cet article. Je remercie aussi Guy Henniart et Florian Herzig pour leur relecture attentive de ce texte.

Bibliographie

[Borel et Tits 1965] A. Borel et J. Tits, "Groupes réductifs", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **27** (1965), 55–151. MR 34 #7527 Zbl 0145.17402

[Bruhat et Tits 1972] F. Bruhat et J. Tits, "Groupes réductifs sur un corps local, I: Données radicielles valuées", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **41** (1972), 5–251. MR 48 #6265 Zbl 0254.14017

[Bruhat et Tits 1984] F. Bruhat et J. Tits, "Groupes réductifs sur un corps local, II: Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **60** (1984), 5–184. MR 86c:20042 Zbl 0597.14041

[Bushnell et Henniart 2006] C. J. Bushnell et G. Henniart, *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **335**, Springer, Berlin, 2006. MR 2007m:22013 Zbl 1100.11041

[Cabanes et Enguehard 2004] M. Cabanes et M. Enguehard, *Representation theory of finite reductive groups*, New Mathematical Monographs **1**, Cambridge University Press, 2004. MR 2005g:20067 Zbl 1069.20032

[Carter 1985] R. W. Carter, *Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters*, Wiley, New York, 1985. MR 87d:20060 Zbl 0567.20023

[Curtis 1966] C. W. Curtis, "The Steinberg character of a finite group with a $(B,\ N)$-pair", *J. Algebra* **4** (1966), 433–441. MR 34 #1406 Zbl 0161.02203

[Demazure 2011a] M. Demazure, "Groupes réductifs: déploiements, sous-groupes, groupes quotients (Exposé XXII)", pp. 109–176 dans *Schémas en groupes* (SGA 3)*, tome III: Structure des schémas en groupes réductifs*, édité par P. Gille et P. Polo, Documents Mathématiques **8**, Société Mathématique de France, Paris, 2011. MR 2867622 Zbl 1241.14003

[Demazure 2011b] M. Demazure, "Sous-groupes paraboliques des groupes réductifs (Exposé XXVI)", dans *Schémas en groupes* (SGA 3)*, tome III: Structure des schémas en groupes réductifs*, édité par P. Gille et P. Polo, Documents Mathématiques **8**, Société Mathématique de France, Paris, 2011. MR 2867622 Zbl 1241.14003

[Grosse-Klönne 2014] E. Grosse-Klönne, "On special representations of p-adic reductive groups", *Duke Math. J.* **163**:12 (2014), 2179–2216. MR 3263032 Zbl 1298.22018

[Haines 2009] T. J. Haines, "Corrigendum: The base change fundamental lemma for central elements in parahoric Hecke algebras", 2009, Voir http://www2.math.umd.edu/~tjh/fl_corr3.pdf.

[Haines et Rapoport 2008] T. J. Haines et M. Rapoport, "Appendix: On parahoric subgroups", *Adv. Math.* **219**:1 (2008), 188–198. MR 2009g:22039 Zbl 1159.22010

[Haines et Rostami 2010] T. J. Haines et S. Rostami, "The Satake isomorphism for special maximal parahoric Hecke algebras", *Rep. Theory* **14** (2010), 264–284. MR 2011g:20077 Zbl 1251.22013

[Henniart et Vignéras 2012] G. Henniart et M.-F. Vignéras, "Comparison of compact induction with parabolic induction", *Pacific J. Math.* **260**:2 (2012), 457–495. MR 3001801 Zbl 1284.22009

[Henniart et Vignéras 2015] G. Henniart et M.-F. Vignéras, "A Satake isomorphism for representations modulo p of reductive groups over local fields", *J. Reine Angew. Math.* **701** (2015), 33–75. MR 3331726 Zbl 06424795

[Herzig 2011] F. Herzig, "The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic GL_n", *Invent. Math.* **186**:2 (2011), 373–434. MR 2845621 Zbl 1235.22030

[Humphreys 1992] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**, Cambridge University Press, 1992. MR 92h:20002 Zbl 0768.20016

[Kottwitz 1997] R. E. Kottwitz, "Isocrystals with additional structure, II", *Compositio Math.* **109**:3 (1997), 255–339. MR 99e:20061 Zbl 0966.20022

[Paskunas 2004] V. Paskunas, *Coefficient systems and supersingular representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$, Mémoires de la Société Mathématique de France **99**, Société Mathématique de France, Paris, 2004. MR 2005m:22017 Zbl 1249.22010 arXiv math/0403240

[Steinberg 1951] R. Steinberg, "A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field", *Trans. Amer. Math. Soc.* **71** (1951), 274–282. MR 13,317d Zbl 0045.30201

[Vignéras 2012a] M.-F. Vignéras, "Emerton's ordinary parts in positive characteristic", communication personnelle, 2012.

[Vignéras 2012b] M.-F. Vignéras, "Représentations p-adiques de torsion admissibles", pp. 639–646 dans *Number theory, analysis and geometry: in memory of Serge Lang*, édité par D. Goldfeld et al., Springer, New York, 2012. MR 2867935 Zbl 1251.22009

Received March 21, 2014. Revised October 6, 2014.

TONY LY
DMA
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE
45, RUE D'ULM
75005 PARIS CEDEX 05
FRANCE
tony.ly@ens.fr

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

msp.org/pjm

Founded in 1951 by E. F. Beckenbach (1906–1982) and F. Wolf (1904–1989)

See inside back cover or msp.org/pjm for submission instructions.

The subscription price for 2015 is US $420/year for the electronic version, and $570/year for print and electronic.
Subscriptions, requests for back issues and changes of subscribers address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 4163, Berkeley, CA 94704-0163, U.S.A. The Pacific Journal of Mathematics is indexed by Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH, PASCAL CNRS Index, Referativnyi Zhurnal, Current Mathematical Publications and Web of Knowledge (Science Citation Index).

The Pacific Journal of Mathematics (ISSN 0030-8730) at the University of California, c/o Department of Mathematics, 798 Evans Hall #3840, Berkeley, CA 94720-3840, is published twelve times a year. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices. POSTMASTER: send address changes to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 4163, Berkeley, CA 94704-0163.

PJM peer review and production are managed by EditFLOW® from Mathematical Sciences Publishers.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 277 No. 2 October 2015

0030-8730(201510)277:2;1-#