

*Pacific  
Journal of  
Mathematics*

**SUR LES PAQUETS D'ARTHUR DES GROUPES UNITAIRES  
ET QUELQUES CONSÉQUENCES POUR  
LES GROUPES CLASSIQUES**

COLETTE MEGLIN ET DAVID RENARD

# SUR LES PAQUETS D'ARTHUR DES GROUPE UNITAIRES ET QUELQUES CONSÉQUENCES POUR LES GROUPE CLASSIQUES

COLETTE MÆGLIN ET DAVID RENARD

**Nous donnons une construction explicite des paquets d'Arthur des groupes unitaires réels par induction cohomologique et induction parabolique et en suivant une idée communiquée par P. Trapa, nous établissons la propriété de multiplicité un de ceux-ci. Nous montrons en particulier des résultats d'irréductibilité de certaines induites paraboliques pour les groupes unitaires, ce qui nous permet de compléter les démonstrations d'énoncés analogues annoncés dans nos travaux sur les paquets d'Arthur des groupes classiques.**

**We give an explicit construction of Arthur packets for real unitary groups by cohomological and parabolic induction and following an idea communicated to us by P. Trapa, we show that they satisfy the multiplicity one property. In particular, we show the irreducibility of some parabolically induced representations for unitary groups, and use this to give the proof of analogous statements made in our work on Arthur packets of classical groups.**

## 1. Introduction

Le premier objet de cet article est de déterminer le plus explicitement possible les paquets d'Arthur des groupes unitaires réels, et d'établir un résultat de multiplicité un pour ceux-ci. Dans [Mœglin et Renard 2017] et les articles afférents [Mœglin et Renard 2018b, 2018a], des résultats analogues ont été établis pour les groupes classiques (i.e., spéciaux orthogonaux et symplectiques) réels. Nous complétons aussi nos résultats sur les groupes classiques en donnant les démonstrations d'énoncés de réduction aux paramètres de bonne parité et d'irréductibilité d'induites paraboliques dans cette réduction annoncés dans [Mœglin et Renard 2017]. Cette démonstration d'irréductibilité d'induites pour les groupes classiques utilise le résultat analogue pour les groupes unitaires démontré dans cet article, ce qui explique qu'elle apparaisse seulement ici.

---

*MSC2010* : primary 20G05, 22E50; secondary 11F55.

*Mots-clefs* : Arthur packets, unitary groups, classical groups.

Les paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires sont déterminés par leurs propriétés, plus précisément par certaines identités endoscopiques [Arthur 2013; Mok 2015]. Nous renvoyons à [Mœglin et Renard 2017], §2 pour une discussion générale sur les paquets d'Arthur et §4 pour les énoncés de nos résultats pour les groupes classiques. Rappelons simplement ici quelques éléments. Soit  $\mathbf{G}$  un groupe algébrique connexe réductif défini sur  $\mathbb{R}$  et notons  $G$  le groupe de ses points réels. Soit

$$\psi_G : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$$

un paramètre d'Arthur. Notons  $S_{\psi_G}$  le centralisateur de l'image de  $\psi_G$  dans  $\widehat{G}$ ,  $(S_{\psi_G})_0$  sa composante neutre, et posons  $A(\psi_G) = S_{\psi_G}/(S_{\psi_G})_0$ . Supposons pour simplifier que ces groupes soient abéliens (c'est une hypothèse qui porte sur  $\mathbf{G}$  et qui est vérifiée si  $\mathbf{G}$  est un groupe classique ou unitaire). D'autre part, supposons que  $\mathbf{G}$  soit quasi-déployé, ou bien forme intérieure pure d'un groupe quasi-déployé. Les conjectures d'Arthur [1984; 1989] dans ce cadre reviennent alors à affirmer l'existence d'une certaine combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations irréductibles unitaires de  $G \times A(\psi_G)$ , que nous notons  $\pi^A(\psi_G)$ , et qui doit vérifier certaines propriétés, notamment des identités de transfert endoscopique. Pour les groupes classiques quasi-déployés, ceci est établi dans [Arthur 2013], où  $\pi^A(\psi_G)$  est caractérisée par les identités de transfert endoscopique attachées aux données endoscopiques elliptiques de  $\mathbf{G}$  et par une identité de transfert endoscopique vers un groupe général linéaire tordu. Il est démontré de plus que les coefficients complexes dans  $\pi^A(\psi_G)$  sont en fait des entiers positifs. Ainsi on peut voir  $\pi^A(\psi_G)$  comme une représentation unitaire de longueur finie de  $G \times A(\psi_G)$ . Décomposons cette représentation selon les représentations irréductibles unitaires de  $G$  en écrivant

$$\pi^A(\psi_G) = \bigoplus_{\pi \in \Pi(\psi_G)} \pi \boxtimes \rho_{\pi}.$$

Ici,  $\Pi(\psi_G)$  est donc un ensemble fini de représentations irréductibles unitaires de  $G$ , le paquet d'Arthur attaché à  $\psi_G$ , et pour tout  $\pi \in \Pi(\psi_G)$ ,  $\rho_{\pi}$  est une représentation unitaire de dimension finie de  $A(\psi_G)$  (une somme directe de caractères car  $A(\psi_G)$  est abélien). La dimension de  $\rho_{\pi}$  est la multiplicité de  $\pi$  dans le paquet  $\Pi(\psi_G)$  (rappelons que les paquets d'Arthur ne sont pas disjoints). Ces résultats sont aussi démontrés pour les groupes classiques non quasi-déployés, c'est-à-dire les groupes spéciaux orthogonaux réels  $\mathbf{SO}(p, q)$ , dans [Mœglin et Renard 2018b] et pour les groupes unitaires dans [Mok 2015; Kaletha et al. 2014].

Le travail entrepris dans [Mœglin et Renard 2017] auquel nous renvoyons pour plus de détails, est de donner une construction explicite de  $\pi^A(\psi_G)$  pour les groupes classiques. Un problème important qui nous occupe aussi est d'établir que les multiplicités sont 1, c'est-à-dire que  $\rho_{\pi}$  est un caractère de  $A(\psi_G)$ . Considérons la

composition de  $\psi_G$  avec la représentation standard  $\mathbf{Std}_G$  du  $L$ -groupe de  $G$ . On obtient un paramètre

$$\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$$

que l'on voit comme une représentation complètement réductible de dimension  $N$  de  $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ . On écrit une décomposition de  $\psi$  de la forme

$$\psi = \psi_{\text{mp}} \oplus \psi_{\text{bp}} = \psi_{\text{mp}} \oplus \psi_{\text{bp, disc}} \oplus \psi_{\text{bp, u}}$$

où  $\psi_{\text{mp}}$  est la partie de mauvaise parité du paramètre,  $\psi_{\text{bp, disc}}$  la partie de bonne parité discrète, et  $\psi_{\text{bp, u}}$  la partie de bonne parité unipotente. Les constructions de [Mœglin et Renard 2017] se font en quatre étapes. La première étape est le cas  $\psi = \psi_{\text{bp, u}}$  des paramètres unipotents et de bonne parité. Dans ce cas,  $\pi^A(\psi_G)$  est déterminée dans [Mœglin 2017] par des correspondance de Howe et la propriété de multiplicité un de tels paquets y est établie. Les représentations de  $G$  dans ces paquets sont faiblement unipotentes au sens de [Knapp et Vogan 1995, Chapter XII]. La deuxième étape est le cas où  $\psi = \psi_{\text{bp, disc}} \oplus \psi_{\text{bp, u}}$ , lorsque le paramètre  $\psi_{\text{bp, disc}}$  possède certaines propriétés de régularité. Les représentations dans le paquet  $\Pi(\psi_G)$  sont alors obtenues par l'induction cohomologique de Vogan–Zuckerman à partir des représentations faiblement unipotentes dans le paquet  $\Pi(\psi_{G_u})$ , où  $\psi_{G_u}$  est un paramètre d'Arthur unipotent pour un groupe  $G_u$  de même type que  $G$  et de rang plus petit, qui après composition avec la représentation standard  $\mathbf{Std}_{G_u}$  donne  $\psi_{\text{bp, u}}$ , et de caractères de groupes unitaires associés à  $\psi_{\text{u, disc}}$ . Sous l'hypothèse de régularité mentionnée, les inductions cohomologiques se font dans le « good range », et en particulier sont irréductibles, les paramètres de Langlands des induites se déduisent facilement de ceux des induisantes, et la propriété de multiplicité un des paquets est conservée. Les résultats sont démontrés dans [Mœglin et Renard 2017] et utilisent de manière cruciale les constructions d'Adams et Johnson [1987; Johnson 1984] qui sont reliées à celles d'Arthur dans [Arancibia et al. 2018]. La troisième étape établie dans [Mœglin et Renard 2018a] consiste à s'affranchir de l'hypothèse de régularité de  $\psi_{\text{bp, disc}}$ , et l'on utilise pour cela les propriétés des foncteurs de translation [Knapp et Vogan 1995, Chapter VII]. Les représentations dans  $\Pi(\psi_G)$  sont encore obtenues par induction cohomologique comme dans le cas régulier, mais celle-ci a maintenant lieu dans le « weakly fair range », où les résultats généraux sont moins fort. En particulier, l'irréductibilité n'est plus préservée, il peut y avoir des annulations, les paramètres de Langlands des induites deviennent très délicats à calculer car il n'y a pas de formule générale. En conséquence, on perd dans cette étape la conservation de la propriété de multiplicité un (mais nous conjecturons que celle-ci reste vraie, il faudrait l'établir en utilisant d'autres outils). Enfin, la quatrième étape consiste à passer des paquets de bonne parité aux paquets généraux. Les énoncés sont simples, cela se fait par une induction parabolique à

partir des représentations du paquet  $\Pi(\psi_{G_{\text{bp}}})$ , où  $\psi_{G_{\text{bp}}}$  est un paramètre d'Arthur de bonne parité pour un groupe  $G_{\text{bp}}$  de même type que  $G$  et de rang plus petit, qui après composition avec la représentation standard  $\mathbf{Std}_{G_{\text{bp}}}$  donne  $\psi_{\text{bp}}$  et d'une représentation d'un groupe linéaire attachée à  $\psi_{\text{mp}}$ . Ces résultats de réduction à la bonne parité ont été annoncés dans [Mœglin et Renard 2017] sans démonstrations, et nous donnons celles-ci ici (proposition 5.2 et théorème 5.4).

L'objet principal de cet article est donc d'établir des résultats analogues, mais pour les groupes unitaires. La stratégie suit les mêmes étapes, mais les résultats sont plus simples. Soit  $G$  un groupe unitaire de rang  $N$  défini sur  $\mathbb{R}$ , disons  $G = U(p, q)$ ,  $p + q = N$ , et  $\psi_G : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  un paramètre d'Arthur pour  $G$ . Maintenant, on remplace la composition avec la représentation standard par la restriction du paramètre à  $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow W_{\mathbb{R}}$  (changement de base). On obtient donc un paramètre

$$\psi = \psi_{G|\mathbb{C}^\times} : \mathbb{C}^\times \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) = W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_N(\mathbb{C}),$$

que l'on voit comme un paramètre pour  $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ . Là encore, on décompose  $\psi$  en somme de représentations irréductibles de  $\mathbb{C}^\times$  (donc de dimension 1) et l'on sépare les composantes de bonne et de mauvaise parité (voir section 2) :

$$\psi = \psi_{\text{mp}} \oplus \psi_{\text{bp}}.$$

La première simplification par rapport au cas des groupes classiques et qu'il n'y a pas à considérer de partie unipotente. La première étape consiste donc à établir les résultats dans le cas  $\psi = \psi_{\text{bp}}$ , en faisant d'abord là aussi une hypothèse de régularité du paramètre. Écrivons

$$\psi = \psi_{\text{bp}} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} (\chi_{t_i} \boxtimes R[a_i])$$

où  $R[a_i]$  est la représentation irréductible algébrique de dimension  $a_i$  de  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\chi_{t_i}$ ,  $t_i \in \mathbb{Z}$ , est le caractère de  $\mathbb{C}^\times$  défini par  $z \mapsto (z/\bar{z})^{t_i/2}$ . La condition de bonne parité est que pour tout  $i = 1, \dots, \ell$ ,  $t_i + a_i - N$  est pair. On suppose les  $t_i$  rangés dans l'ordre décroissant, ce qui est loisible. La condition de régularité est alors que pour tout  $i = 1, \dots, \ell - 1$ ,

$$(1-1) \quad t_i - (a_i - 1) > t_{i+1} + (a_{i+1} - 1).$$

Remarquons que  $N = \sum_{i=1}^{\ell} a_i$ . On note  $\mathcal{D}(\psi)$  l'ensemble des familles  $\underline{d} = (p_i, q_i)_{i=1, \dots, \ell}$  de couples d'entiers tels que  $\sum_{i=1}^{\ell} p_i = p$  et  $\sum_{i=1}^{\ell} q_i = q$ . La représentation  $\pi^A(\psi)$  est construite par induction cohomologique. Notons  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie complexifiée de  $G = U(p, q)$ ,  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$  associé à une involution de Cartan  $\theta$ , et  $\mathfrak{k}$  la complexification de l'algèbre de Lie de  $K$ . À un élément  $\underline{d}$  de  $\mathcal{D}(\psi)$ , on associe de manière explicite une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}_{\underline{d}} = \mathfrak{l}_{\underline{d}} \oplus \mathfrak{v}_{\underline{d}}$  de  $\mathfrak{g}$ . On pose  $L_{\underline{d}} = \text{Norm}_G(\mathfrak{q}_{\underline{d}})$ . C'est

un  $c$ -Levi de  $G$ , au sens de Shelstad [2015], isomorphe au produit  $\prod_{i=1}^{\ell} U(p_i, q_i)$ , et la complexifiée de l'algèbre de Lie de ce groupe est  $\mathfrak{l}_d$ . On introduit un caractère  $\Lambda_d$  de ce groupe, déterminé par les  $(t_i, a_i)$  (voir équation (4-2)), et l'on pose

$$(1-2) \quad \mathcal{A}_d(\psi) = (\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_d, L_d \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^{\dim(\mathfrak{v}_d \cap \mathfrak{k})}(\Lambda_d)$$

où  $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_d, L_d \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^k$  est le foncteur d'induction cohomologique de Vogan–Zuckerman en degré  $k$  (cf. [Knapp et Vogan 1995, Chapter V]). La condition de régularité (1-1) assure que cette induction cohomologique est dans le « good range ». De ceci, il découle que  $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_d, L_d \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^k(\Lambda_d) = 0$ , si  $k \neq \dim(\mathfrak{v}_d \cap \mathfrak{k})$ , et que  $\mathcal{A}_d(\psi)$  est un module unitaire et irréductible. De plus, les  $\mathcal{A}_d(\psi)$  lorsque  $\underline{d}$  parcourt  $\mathcal{D}(\psi)$  sont distincts.

Définissons maintenant pour tout  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)$  un caractère  $\epsilon_d$  du groupe  $A(\psi_G)$ . On définit d'abord  $\epsilon_d$  comme une application de  $[1, \ell]$  dans  $\pm 1$ . Pour cela on pose pour tout entier  $i \in [1, \ell]$ ,  $a_{<i} = \sum_{j<i} a_j$  et

$$(1-3) \quad \epsilon_d(i) = (-1)^{p_i a_{<i} + q_i(a_{<i} + 1) + a_i(a_i - 1)/2}.$$

Le groupe  $A(\psi_G)$  s'identifie de manière naturelle à  $(\pm 1)^\ell$  et  $\epsilon_d$  à un caractère de  $A(\psi_G)$ . Il découle alors essentiellement des résultats de [Adams et Johnson 1987; Johnson 1984; Arancibia et al. 2018] (voir aussi [Mœglin et Renard 2017]) que

$$(1-4) \quad \pi^A(\psi) = \sum_{\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)} \mathcal{A}_d(\psi) \boxtimes \epsilon_d.$$

D'après la remarque faite ci-dessus sur le fait que les  $\mathcal{A}_d(\psi)$  sont non isomorphes deux à deux, on en déduit la propriété de multiplicité un pour ces paquets.

Ensuite, on abandonne l'hypothèse de régularité (1-1) pour ne conserver que l'hypothèse de décroissance de la suite  $(t_i)_{i=1, \dots, \ell}$ , et l'on définit  $\mathcal{A}_d(\psi)$  comme ci-dessus. L'induction cohomologique a alors lieu dans le « weakly fair range » et l'on a toujours  $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_d, L_d \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^k(\Lambda_d) = 0$ , si  $k \neq \dim(\mathfrak{v}_d \cap \mathfrak{k})$ . De plus, si  $\mathcal{A}_d(\psi)$  n'est pas nul, c'est un module unitaire et irréductible, cette dernière propriété étant propre aux groupes unitaires (cf. [Matumoto 1996; Trapa 2001]) et est due à Barbasch et Vogan. Le groupe  $A(\psi_G)$  s'identifie maintenant à un quotient de  $\{\pm 1\}^\ell$ . Nous établissons que le caractère  $\epsilon_d$  défini ci-dessus se factorise par ce quotient si  $\mathcal{A}_d(\psi)$  est non nul (proposition 4.4). Nous montrons que le terme de droite de (1-4), qui est donc encore bien défini comme représentation de  $G \times A(\psi_G)$ , est bien la représentation  $\pi^A(\psi)$ . On a donc (théorème 4.1 du texte) :

**Théorème 1.1.** *On suppose que  $\psi$  est de bonne parité. Alors la représentation associée à  $\psi$  est*

$$\pi^A(\psi) = \sum_{\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)} \mathcal{A}_d(\psi) \boxtimes \epsilon_d.$$

De plus, les représentations  $\mathcal{A}_d(\psi)$  non nulles sont non isomorphes deux à deux.

Comme dans le cas des groupes classiques on passe du cas régulier au cas général (de bonne parité) en utilisant les foncteurs de translation. Pour les groupes unitaires, on a donc en plus le fait que les  $\mathcal{A}_d(\psi)$  sont irréductibles ou nuls (on ne détermine pas quand ces modules sont nuls, voir la [remarque 4.2](#)). De plus, la seconde assertion du théorème montre que la propriété de multiplicité un est conservée.

Passons maintenant à un paramètre  $\psi_G$  général, avec  $\psi = \psi_{\text{mp}} \oplus \psi_{\text{bp}}$ . A la partie de bonne parité  $\psi_{\text{bp}}$  on attache donc un paquet  $\Pi(\psi_{G_{\text{bp}}})$  d'un groupe unitaire de rang  $N_{\text{bp}}$  plus petit par la construction que l'on vient de donner, à la partie de mauvaise parité on attache une représentation irréductible unitaire  $\rho$  d'un groupe  $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C})$ , et l'on a  $N = 2N_\rho + N_{\text{bp}}$ . Ceci détermine un sous-groupe parabolique standard  $P = MN$  de  $G$ , du moins si  $\inf(p, q) \geq N_\rho$ , avec un facteur de Levi  $M$  isomorphe à  $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C}) \times G_{\text{bp}}$  (et donc  $G_{\text{bp}} \simeq \mathbf{U}(p - N_\rho, q - N_\rho)$ ). On a alors ([théorème 5.3](#) du texte), en remarquant que les groupes  $A(\psi_G)$  et  $A(\psi_{G_{\text{bp}}})$  sont naturellement isomorphes :

**Théorème 1.2.** *La représentation  $\pi^A(\psi_G)$  est obtenue à partir de  $\pi^A(\psi_{G_{\text{bp}}})$  par induction parabolique, c'est-à-dire*

$$\pi^A(\psi_G) = \bigoplus_{\pi_{\text{bp}} \in \Pi(\psi_{G_{\text{bp}}})} \text{Ind}_P^G(\rho \boxtimes \pi_{\text{bp}}) \boxtimes \rho_{\pi_{\text{bp}}}.$$

De plus, les induites paraboliques dans le membre de droite sont irréductibles.

Dans cette étape, la conservation de la propriété de multiplicité un des paquets est évidente. On a donc

**Théorème 1.3.** *Les paquets d'Arthur des groupes unitaires réels ont la propriété de multiplicité un.*

## 2. Décomposition des A-paramètres

Supposons d'abord que  $G$  est un groupe classique. On note  $\mathbf{Std}_G$  la représentation standard du  $L$ -groupe de  $G$  dans  $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$  (voir [[Mœglin et Renard 2017](#), §3.1]), par exemple si  $G = \mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ ,  ${}^L G = \mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$  et  $\mathbf{Std}_G$  est donné par l'inclusion de  $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$  dans  $\mathbf{GL}_{2n+1}(\mathbb{C})$ .

Si  $\psi_G : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$  est un paramètre d'Arthur pour  $G$ , on pose  $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$  et l'on voit  $\psi$  comme une représentation complètement réductible de  $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ . Dans [[Mœglin et Renard 2017](#), §4.1], on a décomposé cette représentation en représentations irréductibles, et séparé ces représentations irréductibles selon leur *parité*, qui peut être *bonne* ou *mauvaise*, ce qui permet d'énoncer certains résultats de réduction.

Nous allons maintenant faire de même pour les groupes unitaires. Soit donc maintenant  $G$  un groupe unitaire réel de rang  $N$ , et soit

$$(2-1) \quad \psi_G : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G = \mathbf{GL}_N(\mathbb{C}) \rtimes W_{\mathbb{R}}$$

un paramètre d'Arthur pour  $G$ . On note  $\psi$  la restriction de  $\psi_G$  au sous-groupe  $\mathbb{C}^\times \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  de  $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ , que l'on voit comme une représentation de dimension  $N$  de  $\mathbb{C}^\times \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ . Cette représentation est complètement réductible. Pour tout  $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ , notons  $R[a]$  la représentation algébrique de  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  de dimension  $a$ , et pour tout  $(t, s) \in \mathbb{Z} \times i\mathbb{R}$ , notons

$$(2-2) \quad \chi_{t,s} : z \mapsto (z/\bar{z})^{t/2} (\bar{z}z)^{s/2} = z^{(t+s)/2} \bar{z}^{-(t+s)/2}.$$

C'est un caractère unitaire de  $\mathbb{C}^\times$ . On note pour tout  $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,

$$(2-3) \quad \chi_{t,s,a} = \chi_{t,s} \circ \det_a$$

où  $\det_a$  est le déterminant de  $\mathbf{GL}_a(\mathbb{C})$ .

La forme générale de la décomposition de  $\psi$  en irréductibles (après une éventuelle conjugaison dans  $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ ) est

$$(2-4) \quad \psi = \bigoplus_{(t,s,a) \in \mathcal{E}(\psi)} \chi_{t,s} \otimes R[a]$$

pour un certain ensemble avec multiplicités finies  $\mathcal{E}(\psi)$  de triplets

$$(t, s, a) \in \mathbb{Z} \times i\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_{>0}.$$

**Définition 2.1.** On dit que le triplet  $(t, s, a)$  est de bonne parité si  $s = 0$ , et si  $(t + a - 1)/2 + (N - 1)/2 \in \mathbb{Z}$ .

**Remarque 2.2.** Le fait que  $\psi$  provient d'un  $A$ -paramètre pour  $G = \mathbf{U}(p, q)$  est équivalent à la propriété suivante : si  $(t, s, a) \in \mathcal{E}(\psi)$  n'est pas de bonne parité, alors la multiplicité de ce triplet dans  $\mathcal{E}(\psi)$  est égale à la multiplicité du triplet  $(t, -s, a)$  dans le cas où  $s \neq 0$ , et si  $s = 0$ , la multiplicité de  $(t, 0, a)$  est paire.

Cela revient à dire, en notant  $\mathcal{E}(\psi)_{\text{bp}}$  les triplets de  $\mathcal{E}(\psi)$  ayant bonne parité, qu'il existe une décomposition de  $\mathcal{E}(\psi)$  en l'union disjointe de trois sous-ensembles,  $\mathcal{E}(\psi)_{\text{bp}}$ ,  $\mathcal{E}'(\psi)$ , et  $\mathcal{E}''(\psi)$  tel que si  $(t, s, a) \in \mathcal{E}'(\psi)$  alors  $(t, -s, a) \in \mathcal{E}''(\psi)$  avec la même multiplicité.

On note

$$(2-5) \quad \psi_{\text{bp}} := \bigoplus_{(t,s,a) \in \mathcal{E}(\psi)_{\text{bp}}} \chi_{t,s} \otimes R[a].$$

Alors  $\psi_{\text{bp}}$  est un morphisme de  $\mathbb{C}^\times \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbf{GL}_{N_{\text{bp}}}(\mathbb{C})$  où

$$(2-6) \quad N_{\text{bp}} = \sum_{(t,s,a) \in \mathcal{E}(\psi)_{\text{bp}}} a,$$

qui provient d'un  $A$ -paramètre comme en (2-1), mais pour les groupes unitaires de rang  $N_{\text{bp}}$ .

### 3. Réalisation des groupes unitaires et de leur $c$ -Levi. Induction cohomologique

**3A. Paires paraboliques.** Soit  $G$  le groupe des points réels d'un groupe algébrique connexe réductif défini sur  $\mathbb{R}$ . On fixe une involution de Cartan  $\theta$  de  $G$ , et l'on note  $K$  le sous-groupe des points fixes de  $\theta$  : c'est un sous-groupe compact maximal de  $G$ . On suppose que  $G$  et  $K$  sont de même rang ; autrement dit,  $G$  possède un sous-groupe de Cartan  $T$  inclus dans  $K$  et donc compact. On note  $\mathfrak{t}_0$ ,  $\mathfrak{k}_0$  et  $\mathfrak{g}_0$  les algèbres de Lie respectives de  $T, K$  et  $G$  et  $\mathfrak{t}$ ,  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{g}$  leur complexifiées. Les sous-algèbres paraboliques  $\theta$ -stables de  $\mathfrak{g}$  sont obtenues de la manière suivante. On fixe un élément  $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}_0^*$ , et l'on pose :

$$(3-1) \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{g}^\nu = \mathfrak{t} \oplus \left( \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \\ \langle \nu, \alpha \rangle = 0}} \mathfrak{g}^\alpha \right), \quad \mathfrak{v} = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \\ \langle \nu, \alpha \rangle > 0}} \mathfrak{g}^\alpha,$$

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{v}, \quad L = \text{Norm}_G(\mathfrak{q}).$$

Dans cet article, nous appellerons paire parabolique une paire  $(\mathfrak{q}, L)$  obtenue comme ci-dessus, avec  $\mathfrak{q}$  sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ . Le sous-groupe  $L$  de  $G$  sera appelé  $c$ -Levi de  $G$  (terminologie de Shelstad [2015]).

On note  $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^k$  le foncteur d'induction cohomologique de Vogan–Zuckerman (cf. [Vogan 1981, §6.3.1]) en degré  $k$ , de la catégorie des  $(\mathfrak{l}, K \cap L)$ -modules vers la catégorie des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules. Dans ce contexte, le degré qui nous intéresse particulièrement, et même exclusivement, est  $S = \dim(\mathfrak{v} \cap \mathfrak{k})$ , et dans l'article, nous écrirons  $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^S$  sans préciser de nouveau ce qu'est  $S$ .

Si  $\Lambda$  est un caractère unitaire de  $L$ , on note  $\lambda$  sa différentielle, que l'on voit comme un élément de  $i\mathfrak{t}_0^*$ . On pose alors

$$A_{\mathfrak{q}}(\Lambda) = (\mathcal{R}_{\mathfrak{q}, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^S(\Lambda).$$

Si le groupe  $L$  est connexe,  $\lambda$  détermine  $\Lambda$  et l'on note alors cette représentation  $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ .

Sous certaines conditions sur le caractère infinitésimal de la représentation  $\sigma$  de  $L$  que l'on induit, on a des résultats d'annulation, d'irréductibilité et d'unitarité des modules  $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^S(\sigma)$ . Nous renvoyons à [Knapp et Vogan 1995] (p. 34, 35 et



à la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{t}$ . On a

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{\pm(e_i \pm e_j), 1 \leq i < j \leq N\} \cup \{\pm 2e_i, 1 \leq i \leq N\}, \\ \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\pm(e_i - e_j), 1 \leq i < j \leq N\},\end{aligned}$$

où  $e_i \in \sqrt{-1} \mathfrak{t}_0^* \subset \mathfrak{t}^*$  est la forme linéaire  $t(a_1, \dots, a_N) \mapsto \sqrt{-1} a_i$ . On fixe les systèmes de racines positives

$$\begin{aligned}\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{(e_i \pm e_j), 1 \leq i < j \leq N\} \cup \{2e_i, 1 \leq i \leq N\}, \\ \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{(e_i - e_j), 1 \leq i < j \leq N\}.\end{aligned}$$

On identifie  $\mathfrak{t}^*$  et  $\mathbb{C}^N$  grâce à la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$  de  $\mathfrak{t}^*$ , et de même pour  $\mathfrak{t}$  grâce à la base duale.

**3C. Paires paraboliques maximales et induction cohomologique.** On continue avec les notations du paragraphe précédent, en particulier  $\mathcal{G} = \mathbf{Sp}(2N, \mathbb{R})$ . Soit  $(q, L)$  une paire parabolique pour  $\mathcal{G}$ , et l'on suppose que la sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{v}$  est maximale. Une telle sous-algèbre est obtenue en prenant un élément de  $\mathfrak{t}$  de la forme

$$t_{p,q} = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-p-q}, \underbrace{-1, \dots, -1}_q \right)$$

avec  $p + q \leq N$ . On pose alors

$$(3-2) \quad \begin{aligned} \mathfrak{l}_{p,q} &= \mathfrak{g}^{t_{p,q}} = \mathfrak{t} \oplus \left( \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \\ \alpha(t)=0}} \mathfrak{g}_\alpha \right), & \mathfrak{v}'_{p,q} &= \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \\ \alpha(t) > 0}} \mathfrak{g}_\alpha, \\ \mathfrak{q}'_{p,q} &= \mathfrak{l}_{p,q} \oplus \mathfrak{v}'_{p,q}, & L_{p,q} &= \text{Norm}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{q}_{p,q}). \end{aligned}$$

Dans le cas où  $p + q = N$ ,  $L_{p,q}$  est une réalisation du groupe unitaire  $U(p, q)$ . Les racines de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{l}_{p,q}$  sont :

$$\begin{aligned} \pm(e_i - e_j), & \quad 1 \leq i < j \leq p \quad \text{ou} \quad p+1 \leq i < j \leq N, \\ \pm(e_i + e_j), & \quad 1 \leq i \leq p < j \leq N. \end{aligned}$$

On choisit comme système de racines positives :

$$\Delta^+_{p,q} = \Delta^+(\mathfrak{l}_{p,q}, \mathfrak{t}) = \begin{cases} e_i - e_j, & 1 \leq i < j \leq p, \\ -(e_i - e_j), & p+1 \leq i < j \leq N \\ e_i + e_j, & 1 \leq i \leq p < j \leq N. \end{cases}$$

On pose

(3-3)

$$\begin{aligned} \delta(\mathfrak{l}_{p,q}) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{p,q}^+} \alpha \\ &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{N-1, N-3, \dots, q-p+1}_p, \underbrace{p-q+1, \dots, p-q+3, \dots, N-1}_q \right). \end{aligned}$$

On a  $\mathcal{H} = L_{N,0}$  et  $L_{p,q} \cap \mathcal{H} \simeq U(p) \times U(q)$ .

**3D. *c-Levi des  $U(p, q)$ .*** On continue avec les notations de la section précédente. Notons  $\mathcal{D}(p, q)$  l'ensemble des familles  $\underline{d} = (p_i, q_i)_{i=1, \dots, \ell}$  de couples d'entiers positifs ou nuls tels que

$$\sum_i p_i = p \quad \text{et} \quad \sum_i q_i = q \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(N) = \coprod_{\substack{p,q \\ p+q=N}} \mathcal{D}(p, q).$$

Pour tout  $\underline{d} = (p_i, q_i)_{i=1, \dots, \ell} \in \mathcal{D}(N)$ , notons

$$t_{\underline{d}} = \left( \underbrace{\ell, \dots, \ell}_{p_1}, \dots, \underbrace{2, \dots, 2}_{p_{\ell-1}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_{\ell}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q_{\ell}}, \underbrace{-2, \dots, -2}_{q_{\ell-1}}, \dots, \underbrace{-\ell, \dots, -\ell}_{q_1} \right).$$

On définit la sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}'_{\underline{d}} = \mathfrak{l}_{\underline{d}} \oplus \mathfrak{v}'_{\underline{d}}$  et le  $c$ -Levi  $L_{\underline{d}}$  associés à  $t_{\underline{d}}$  comme en (3-1). Si  $\underline{d} \in \mathcal{D}(p, q)$ , alors  $\mathfrak{l}_{\underline{d}} \subset \mathfrak{l}_{p,q}$  et  $L_{\underline{d}}$  est un  $c$ -Levi de  $L_{p,q}$ , associé à la sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}_{\underline{d}}$  de  $\mathfrak{l}_{p,q}$ , où

$$(3-4) \quad \mathfrak{q}_{\underline{d}} = \mathfrak{q}'_{\underline{d}} \cap \mathfrak{l}_{p,q} = \mathfrak{l}_{\underline{d}} \oplus (\mathfrak{l}_{p,q} \cap \mathfrak{v}'_{\underline{d}}) = \mathfrak{l}_{\underline{d}} \oplus \mathfrak{v}_{\underline{d}}.$$

On pose  $\Delta^+(\mathfrak{l}_{\underline{d}}, \mathfrak{t}) = \Delta(\mathfrak{l}_{\underline{d}}, \mathfrak{t}) \cap \Delta^+(\mathfrak{l}_{p,q}, \mathfrak{t})$  et pour tout  $i = 1, \dots, \ell$ ,  $a_i = p_i + q_i$ ,

(3-5)  $\delta(\mathfrak{l}_{\underline{d}})$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l}_{\underline{d}}, \mathfrak{t})} \alpha \\ &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{a_1 - 1, a_1 - 3, \dots, q_1 - p_1 + 1}_{p_1}, \underbrace{a_2 - 1, a_2 - 3, \dots, q_2 - p_2 + 1, \dots}_{p_2}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{a_{\ell} - 1, a_{\ell} - 3, \dots, q_{\ell} - p_{\ell} + 1, p_{\ell} - q_{\ell} + 1, \dots, p_{\ell} - q_{\ell} + 3, \dots, a_{\ell} - 1, \dots}_{p_{\ell}}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{p_2 - q_2 + 1, \dots, p_2 - q_2 + 3, \dots, a_2 - 1}_{q_2}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{p_1 - q_1 + 1, \dots, p_1 - q_1 + 3, \dots, a_1 - 1}_{q_1} \right). \end{aligned}$$

#### 4. Paramètres de bonne parité

Soit  $\psi$  un  $A$ -paramètre pour  $U(p, q)$  comme en (2-1). On suppose que  $\psi$  est de bonne parité, i.e.,  $\psi = \psi_{\text{bp}}$ . On a donc

$$(4-1) \quad \psi = \bigoplus_{i=1}^{\ell} (\chi_{t_i} \otimes R[a_i]).$$

On a supprimé les paramètres  $s_i$  des notations, puisque dans le cas de bonne parité, ils sont tous nuls. On ordonne les indices  $i$  pour que  $t_1 \geq \dots \geq t_\ell$  et si  $t_i = t_{i+1}$  alors  $a_i \geq a_{i+1}$ .

On reprend les notations de la section 3D, en particulier la réalisation de  $U(p, q)$  comme sous-groupe  $L_{p,q}$  d'un groupe symplectique. Pour tout  $i \in [1, \ell]$ , on fixe une décomposition  $a_i = p_i + q_i$  en somme de deux entiers éventuellement nuls. On note  $\mathcal{D}(\psi)$  l'ensemble de ces décompositions qui vérifient de plus  $p = \sum_i p_i$ . On a donc  $\mathcal{D}(\psi) \subset \mathcal{D}(p, q)$ , ce dernier ensemble étant défini dans la section 3D, et en particulier un élément  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)$  détermine un  $c$ -Levi  $L_{\underline{d}}$  de  $L_{p,q}$  isomorphe à  $\prod_i U(p_i, q_i)$  et une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}_{\underline{d}} = \mathfrak{l}_{\underline{d}} \oplus \mathfrak{v}_{\underline{d}}$  de  $\mathfrak{l}_{p,q}$  dont la sous-algèbre de Levi est précisément l'algèbre de Lie complexifiée de  $L_{\underline{d}}$ . Pour tout  $i \in [1, \ell]$ , on pose  $a_{<i} := \sum_{j<i} a_j$ .

Via l'isomorphisme de  $L_{\underline{d}}$  avec  $\prod_i U(p_i, q_i)$ , on définit le caractère  $\Lambda_{\underline{d}}$  du groupe  $L_{\underline{d}}$  par

$$(4-2) \quad \Lambda_{\underline{d}} = \bigotimes_i \det^{(t_i + a_i - N)/2 - a_{<i}}.$$

On peut aussi définir ce caractère en donnant sa différentielle comme un élément de  $\mathfrak{t}^*$  dans le système de coordonnées de la section 3B. Posons  $\lambda_i = (t_i + a_i - N)/2 - a_{<i}$ . On a alors

$$d\Lambda_{\underline{d}} = \left( \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{p_1}, \dots, \underbrace{\lambda_\ell, \dots, \lambda_\ell}_{p_\ell}, \underbrace{-\lambda_\ell, \dots, \lambda_\ell}_{q_\ell}, \dots, \underbrace{-\lambda_1, \dots, -\lambda_1}_{q_1} \right)$$

Le foncteur d'induction cohomologique  $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{\underline{d}}, L_{\underline{d}} \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^{\dim(\mathfrak{v}_{\underline{d}} \cap \mathfrak{k})}$  permet de produire une représentation de  $U(p, q)$  à partir de ce caractère. On pose

$$(4-3) \quad \mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi) = (\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{\underline{d}}, L_{\underline{d}} \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^{\dim(\mathfrak{v}_{\underline{d}} \cap \mathfrak{k})}(\Lambda_{\underline{d}}).$$

La condition  $t_1 \geq \dots \geq t_\ell$  assure que cette induction cohomologique est dans le weakly fair range (cf. [Knapp et Vogan 1995, p. 35]). De ceci, il découle que  $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{\underline{d}}, L_{\underline{d}} \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^i(\Lambda_{\underline{d}}) = 0$ , si  $i \neq \dim(\mathfrak{v}_{\underline{d}} \cap \mathfrak{k})$ , et que si  $\mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi)$  n'est pas nul, c'est un module unitaire et irréductible, cette dernière propriété étant propre aux groupes unitaires (cf. [Matumoto 1996; Trapa 2001]).

On a défini l'application  $\epsilon_d$  de  $[1, \ell]$  dans  $\pm 1$  en (1-3). Nous allons expliquer plus loin comment  $A(\psi_G)$  s'identifie à un quotient de  $\{\pm 1\}^\ell$  et  $\epsilon_d$  à un caractère de  $A(\psi_G)$ .

**Théorème 4.1.** *On suppose que  $\psi$  est de bonne parité. Alors la représentation associée à  $\psi$  est*

$$\pi^A(\psi) := \sum_d \mathcal{A}_d(\psi) \boxtimes \epsilon_d.$$

De plus, les représentations  $\mathcal{A}_d(\psi)$  non nulles sont non isomorphes deux à deux.

**Remarque 4.2.** On ne précise pas ici quand les  $\mathcal{A}_d(\psi)$  sont non nulles. Toutefois l'article [Trapa 2001] donne un algorithme pour résoudre cette question ; c'est un problème difficile. La deuxième assertion du théorème est une assertion de multiplicité un dans les paquets d'Arthur pour des paramètres de bonne parité. Les résultats de réduction à la bonne parité établis dans la section 5B montrent qu'il y a multiplicité un dans tous les paquets d'Arthur des groupes unitaires.

*Démonstration du théorème 4.1.* Le théorème est déjà établi sous la condition que les induites cohomologiques (4-3) soient réalisées dans le good range, ce qui est plus restrictif que le weakly fair range, la condition sur  $\psi$  étant (1-1). Dans ce cas,  $A(\psi_G)$  s'identifie naturellement à  $\{\pm 1\}^\ell$ .

En effet, sous cette condition, le théorème est un cas particulier de [Mœglin et Renard 2017, théorème 9.3], qui résulte fondamentalement de [Adams et Johnson 1987; Johnson 1984; Arancibia et al. 2018]. De plus, dans ce cas, les  $\mathcal{A}_d(\psi)$  sont non nulles et non isomorphes deux à deux.

On se ramène à ce cas en utilisant les foncteurs de translation (cf. [Knapp et Vogan 1995, Chapter VII and Chapter VIII, §5]). On fixe des entiers  $T_1 \gg \dots \gg T_\ell \geq 0$  et on note  $\psi_+$  le  $A$ -paramètre

$$(4-4) \quad \psi_+ = \bigoplus_i (\chi_{t_i+T_i} \otimes R[a_i]),$$

de sorte que  $\psi_+$  vérifie les hypothèse de good range (1-1), et l'on a donc

$$\pi^A(\psi_+) = \bigoplus_{d \in \mathcal{D}(\psi_+)} \mathcal{A}_d(\psi_+) \boxtimes \epsilon_d,$$

où les modules  $\mathcal{A}_d(\psi_+)$  sont définis comme en (4-3) en remplaçant les  $t_i$  par les  $t_i + T_i$  dans la définition de  $\Lambda_d$  en (4-2). Avec ces hypothèses, comme nous l'avons dit,  $A(\psi_+)$  s'identifie à  $\{\pm 1\}^\ell$  et cette expression est alors bien définie.

On considère le foncteur de translation correspondant à la représentation de dimension finie  $\mathcal{F}$  qui est la restriction à  $U(p, q)$  de la représentation de  $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$

de plus bas poids (dans les coordonnées usuelles pour ce groupe)

$$\left( \underbrace{-T_1/2, \dots, -T_1/2}_{a_1}, \dots, \underbrace{-T_\ell/2, \dots, -T_\ell/2}_{a_\ell} \right).$$

Dans les coordonnées choisies ci-dessus pour  $t^*$ , ce plus bas poids est

$$\gamma = \left( \underbrace{-T_1/2, \dots, -T_1/2}_{p_1}, \dots, \underbrace{-T_\ell/2, \dots, -T_\ell/2}_{p_\ell}, \underbrace{T_\ell/2, \dots, T_\ell/2}_{q_\ell}, \dots, \underbrace{T_1/2, \dots, T_1/2}_{q_1} \right).$$

Posons  $\delta(\underline{v}_d) = \delta(\underline{l}_{p,q}) - \delta(\underline{l}_d)$ .

**Remarque 4.3.** On voit facilement avec les expressions (3-3) et (3-5) que l'on peut définir les  $T_i$  vérifiant les conditions ci-dessus en posant  $\gamma = -2m \delta(\underline{v}_d)$  pour un entier  $m$  assez grand.

On note  $\mathcal{T}$  ce foncteur et on sait d'après [Mœglin et Renard 2018a, théorème 4.1], que l'on a

$$\mathcal{T}(\pi^A(\psi_+)) = \pi^A(\psi),$$

et d'autre part, d'après [Mœglin et Renard 2018a, théorème 4.3], en remarquant que  $\mathcal{D}(\psi_+) = \mathcal{D}(\psi)$ , on a  $\mathcal{T}(\mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi_+)) = \mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi)$  pour tout  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)$ . Pour un tel  $\underline{d}$  fixé, le caractère  $\epsilon_{\underline{d}}$  se factorise en un caractère de  $A(\psi_G)$  si et seulement si pour tout  $i, j \in [1, \ell]$  tels que  $t_i = t_j$  et  $a_i = a_j$ , on a  $\epsilon_{\underline{d}}(i) = \epsilon_{\underline{d}}(j)$ . Or on a d'après [Matumoto 1996, Theorem 3.3.4; Trapa 2001, Theorem 7.9, Lemma 9.3], que l'on commentera ci-dessous

**Proposition 4.4.** *La représentation  $\mathcal{T}(\mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi_+))$  est non nulle seulement si pour tout  $i \in [1, \ell[$  tel que  $t_{i+1} = t_i$  on a  $p_i \geq q_{i+1}$  et  $q_i \geq p_{i+1}$ .*

Comme l'a remarqué Matumoto juste avant l'énoncé de son théorème, cette proposition est une conséquence du paragraphe 4.2 de [Barbasch et Vogan 1983]. On peut donc dire que cette proposition est essentiellement due à Barbasch et Vogan. On peut faire des inductions par étage et donc supposer que  $\ell = 2$ ,  $i = 1$  et  $t_1 = t_2$ . On rappelle que l'on a ordonné les couples  $(t_i, a_i)$  tel que si  $t_i = t_{i+1}$  alors  $a_i \geq a_{i+1}$  sans cette hypothèse la proposition serait fautive. Cette hypothèse est un oubli dans [Matumoto 1996] et les choix de cette référence pour l'induction cohomologique étant opposés aux nôtres les inégalités sont inversées.

Ainsi pour tout  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)$ , soit le caractère  $\epsilon_{\underline{d}}$  se factorise en un caractère de  $A(\psi_G)$ , soit  $\mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi)$  est nul, et ceci donne un sens à la formule donnant  $\pi^A(\psi)$  dans le théorème et établit la première partie de celui-ci.

Démontrons maintenant l'assertion de multiplicité un. La difficulté vient de l'utilisation du foncteur de translation permettant de passer du good range au weakly

fair range. Avec les notations ci-dessus, on sait que si  $\underline{d} \neq \underline{d}'$ , alors  $\mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi_+)$  et  $\mathcal{A}_{\underline{d}'}(\psi_+)$  sont non isomorphes, et l'on voudrait en déduire que si les représentations  $\mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi) = \mathcal{T}(\mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi_+))$  et  $\mathcal{A}_{\underline{d}'}(\psi) = \mathcal{T}(\mathcal{A}_{\underline{d}'}(\psi_+))$  sont non nulles, alors elles sont non isomorphes.

Pour cela, nous allons utiliser des résultats sur les foncteurs de translation dis-séminés dans [Knapp et Vogan 1995], et nous allons expliquer comment nous y ramener, ce qui nous oblige à quelques détours. Signalons aussi que les idées sont expliquées et mises en œuvre dans [Vogan 1988] dans un contexte différent, et que c'est P. Trapa qui nous a suggéré que la démonstration de l'irréductibilité de l'induction cohomologique convenablement comprise pouvait aussi donner l'énoncé de multiplicité un voulu. La première chose à faire est de se ramener à des foncteurs d'induction cohomologique où la sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}$  est fixée et où ce sont les formes réelles fortes au sens de [Adams et al. 1992] qui vont varier. Expliquons le formalisme. On part du groupe compact  $U(N)$  et de sa réalisation usuelle comme sous-groupe des points fixes de l'involution  $\sigma : g \mapsto {}^t\bar{g}^{-1}$  de  $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ . On note ici  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ . On choisit un tore maximal  $T$  de  $U(N)$ , et l'on note  $\mathfrak{t}$  la complexifiée de son algèbre de Lie. On fixe une sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{t}$ . On identifie  $T$  à  $U(1)^N$ ,  $\mathfrak{t}$  à  $\mathbb{C}^N$  de sorte que les racines simples de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{b}$  soient les formes linéaires  $e_i - e_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , où  $(e_i)_{i=1, \dots, N}$  est la base canonique de  $(\mathbb{C}^N)^*$ . La partition  $N = \sum_{i=1}^{\ell} a_i$  détermine alors une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{v}$  de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{b}$ . Notons  $T[2]$  l'ensemble des éléments d'ordre 2 de  $T$ . Pour tout  $t \in T[2]$ , posons

$$\sigma_t = \text{Ad}(t) \circ \sigma, \quad \theta_t = \text{Ad}(t).$$

Alors  $\sigma_t$  est une forme réelle de  $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$  et nous notons  $U_t$  le groupe de ses points réels. L'involution  $\theta_t$  est une involution de Cartan de  $U_t$ , et l'on note  $K_t$  le sous-groupe de ses points fixes. C'est un sous-groupe compact maximal de  $U_t$ . Les  $U_t$  sont des formes intérieures pures de  $U(N) = U_{t=1}$  (on obtient plus généralement toutes les formes réelles fortes au sens de [Adams et al. 1992] en considérant plutôt que  $T[2]$  l'ensemble des éléments de  $T$  dont le carré est dans le centre de  $U_N$ , c'est-à-dire de la forme  $\lambda I_N$ . Le choix d'une racine carré de  $\lambda$  identifie le groupe des points réels à un  $U(p, q)$ ). Si l'on écrit  $t = (\eta_1, \dots, \eta_N)$  par l'identification  $T = U(1)^N$ , avec  $\eta_i \in \{\pm 1\}$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ , alors  $U_t$  est isomorphe au groupe  $U(n_1(t), n_{-1}(t))$  où  $n_1(t)$  est le nombre des  $\eta_i$  égaux à 1 et  $n_{-1}(t)$  celui des  $\eta_i$  égaux à  $-1$ . Pour  $t_1, t_2 \in T[2]$ , les formes réelles  $U_{t_1}$  et  $U_{t_2}$  sont équivalentes si et seulement si  $n_1(t_1) = n_1(t_2)$  et  $n_{-1}(t_1) = n_{-1}(t_2)$ . La sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}$  est  $\theta_t$ -stable pour tout  $t \in T[2]$ . Posons  $L_t = \text{Norm}_{U_t}(\mathfrak{q})$  : c'est un  $c$ -Levi de  $U_t$  et la complexifiée de son algèbre de Lie est  $\mathfrak{l}$ . Ces groupes  $L_t$ , pour  $t \in T[2]$ , sont des formes réelles d'un groupe complexe  $L_{\mathbb{C}}$  isomorphe à  $\prod_i \mathbf{GL}_{a_i}(\mathbb{C})$ . Le groupe  $L_t$  est isomorphe à  $\prod_i U(p_i, q_i)$ , où  $p_i$  (resp.  $q_i$ ) est le nombre de 1 (resp. de  $-1$ )

dans les  $a_1$  premières coordonnées de  $t$ , et ainsi de suite. On a donc pour chaque  $t$  des foncteurs d'induction cohomologique

$$(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}, L_t \cap K_t}^{\mathfrak{g}, K_t})^k$$

que nous allons toujours considérer dans le bon degré, c'est-à-dire  $S_t = \dim(\mathfrak{v} \cap \mathfrak{k}_t)$ .

On revient maintenant à  $p$  et  $q$  fixés avec  $p + q = N$  et pour tout élément  $\underline{d} = (p_i, q_i) \in \mathcal{D}(\psi)$ , on pose

$$t_{\underline{d}} = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{p_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q_1}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_\ell}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q_\ell} \right).$$

On fixe un caractère  $\Lambda$  de  $L_{\mathbb{C}}$  : dans l'identification de  $L_{\mathbb{C}}$  avec  $\prod_i \mathbf{GL}_{a_i}(\mathbb{C})$ , il est donné par

$$\Lambda = \bigotimes_i \det^{(t_i + a_i - N)/2 - a_{<i}}$$

On pose alors pour tout  $\underline{d} = (p_i, q_i) \in \mathcal{D}(\psi)$ ,

$$\mathcal{A}'_{\underline{d}}(\psi) = (\mathcal{R}_{\mathfrak{q}, L_{t_{\underline{d}}} \cap K_{t_{\underline{d}}}}^{\mathfrak{g}, K_{t_{\underline{d}}}})^{S_{t_{\underline{d}}}}(\Lambda).$$

C'est un  $(\mathfrak{g}, K_{t_{\underline{d}}})$ -module. Comme les formes réelles  $U_{t_{\underline{d}}}$  sont toutes équivalentes lorsque  $\underline{d}$  décrit  $\mathcal{D}(\psi)$ , c'est-à-dire conjuguées deux à deux par un automorphisme intérieur de  $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ , on peut voir les classes d'équivalence de  $(\mathfrak{g}, K_{t_{\underline{d}}})$ -modules comme des classes d'équivalence de modules de Harish-Chandra pour  $U(p, q)$ , et les modules  $\mathcal{A}'_{\underline{d}}(\psi)$  correspondent aux modules  $\mathcal{A}_{\underline{d}}(\psi)$ . Il s'agit donc de montrer que les modules  $\mathcal{A}'_{\underline{d}}(\psi)$  non nuls sont inéquivalents deux à deux, vus comme modules de Harish-Chandra pour  $U(p, q)$ . D'autre part, comme les groupes unitaires sont connexes, la catégorie des  $(\mathfrak{g}, K_{t_{\underline{d}}})$ -modules est une sous-catégorie pleine de la catégorie des  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -modules, où  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  est l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ , et il s'agit donc de montrer que les modules  $\mathcal{A}'_{\underline{d}}(\psi)$  non nuls sont inéquivalents deux à deux comme  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -modules.

Bien sûr, on peut remplacer  $\psi$  par  $\psi_+$  dans ces considérations, et l'on obtient de même des modules  $\mathcal{A}'_{\underline{d}}(\psi_+)$ ,  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi_+) = \mathcal{D}(\psi)$  et l'on sait qu'ils sont inéquivalents deux à deux comme  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -modules.

Rappelons maintenant quelques éléments sur le foncteur de translation tirés de [Knapp et Vogan 1995, Chapter VIII]. Celui-ci est donc défini par la représentation de dimension finie  $\mathcal{F}$  de plus bas poids  $\gamma = -2m \delta(\mathfrak{v})$ , d'après la remarque 4.3, et nous sommes donc dans les hypothèses de la proposition 8.31 de [Knapp et Vogan 1995]. Le foncteur  $\mathcal{T}$  nous fait passer des modules ayant comme caractère infinitésimal généralisé celui donné par le paramètre  $\psi_+$ , notons-le  $\mu_+$ , à des modules ayant comme caractère infinitésimal généralisé celui donné par le paramètre  $\psi$ , notons-le  $\mu = \mu_+ + \gamma = \mu_+ - 2m \delta(\mathfrak{v})$ . Ici, on voit  $\mu_+$  et  $\mu$  comme des éléments de  $\mathfrak{t}^*$  qui déterminent chacun un caractère du centre de l'algèbre enveloppante.

Reprenons des éléments de la démonstration de la proposition 8.31 de [Knapp et Vogan 1995], que l'on particularise au cas des groupes unitaires étudiés ici, en adaptant légèrement les notations. On y introduit pour tout  $\lambda' \in \mathfrak{t}^*$ , un module de Verma généralisé noté  $M(\lambda')$ , et l'on montre que si  $\lambda'$  vérifie les conditions du weakly fair range, alors  $\mathcal{T}(M(\lambda' + 2m \delta(\mathfrak{v}))) = M(\lambda')$  [loc. cit., Lemma 8.35]. On en déduit [loc. cit., Lemma 8.39] que pour toute forme réelle  $G$  du groupe complexe ambiant muni d'une involution de Cartan  $\theta$  ayant comme groupe des points fixes le sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$ , tel que  $\mathfrak{q}$  soit une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable, avec de plus les conditions de weakly fair range sur  $\lambda'$ , que l'on a

$$\mathcal{T}(A_{\mathfrak{q}, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K}(\lambda' + 2m \delta(\mathfrak{v}))) = A_{\mathfrak{q}, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K}(\lambda').$$

En particulier, ceci s'applique aux formes réelles  $U_{\mathfrak{d}}$  définies ci-dessus et a  $\lambda' + \delta = \mu$  ( $\delta$  désigne bien entendu la demi-somme des racines positive), et l'on a donc

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}'_{\mathfrak{d}}(\psi_+)) = \mathcal{A}'_{\mathfrak{d}}(\psi),$$

pour tout  $\mathfrak{d} \in \mathcal{D}(\psi)$ . On introduit  $Q(\lambda') = \text{End}(M(\lambda'))$ , qui est un  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ -module ayant pour caractère infinitésimal  $(\lambda' + \delta, -(\lambda' + \delta))$  muni d'une application naturelle  $\varphi : \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow Q(\lambda')$  qui respecte les actions à gauche de  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ . Ensuite, on prend les élément  $U(N)$ -finis de l'algèbre  $Q(\lambda')$  en posant  $R(\lambda') = \text{End}(M(\lambda'))_{U(N)}$ . Ainsi,  $R(\lambda')$  devient un  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, U(N) \times U(N))$ -module, et l'image de  $\varphi$  est à valeurs dans  $R(\lambda')$ . On pose alors  $S = S(\lambda') = R(\lambda') \otimes \text{End}(\mathcal{F})$ , et cette algèbre admet une décomposition selon ses composantes primaires (à gauche et à droite),  $S = \bigoplus_{\alpha, \beta} S_{\alpha, \beta}^{\beta}$ .

Prenons maintenant  $\lambda' = \mu_+ - \delta$ . La composante  $S_{\mu}^{-\mu}$  est une sous-algèbre de  $S$ . Soit  $M$  un  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ -module ayant pour caractère infinitésimal  $\mu_+$ , et supposons que  $M$  soit aussi un module à gauche unifié pour  $R(\lambda')$  tel que les deux actions soient compatibles via  $\varphi$ . Alors la composante  $\mu$ -primaire  $N_{\mu}$  du  $S$ -module  $N = M \otimes \mathcal{F}$  est naturellement un  $S_{\mu}^{-\mu}$ -module. Ce qui est fondamental pour nous ici est le résultat suivant : si  $M$  est un  $R(\lambda')$ -module simple, alors  $N_{\mu}$  est  $S_{\mu}^{-\mu}$ -module simple ou bien 0, et de plus, si  $M^1, M^2$  sont deux  $R(\lambda')$ -module simples non équivalents, et si  $N_{\mu}^1$  et  $N_{\mu}^2$  sont non nuls, alors ce sont deux  $S_{\mu}^{-\mu}$ -modules simples non équivalents. On trouve la démonstration à la page 524 de [Knapp et Vogan 1995], pour une algèbre  $S$  différente, mais la démonstration est formelle et se transpose sans changements. D'ailleurs un résultat formel général analogue (avec la même démonstration) dans le cadre des algèbres à idempotents se trouve dans [Renard 2010, proposition I.3.2].

Il y a un foncteur de translation pour les  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ -modules construit avec  $\text{End}(\mathcal{F})$  allant des modules ayant pour caractère infinitésimal généralisé  $(\mu_+, -\mu_+)$  vers les modules ayant pour caractère infinitésimal généralisé  $(\mu, -\mu)$ . Notons le  $\mathcal{T}^2$ . On a alors

$$S_{\mu}^{-\mu} = \mathcal{T}^2(R(\mu_+ - \delta)) = R(\mu - \delta).$$

De plus, on peut munir les  $\mathcal{A}'_{\underline{d}}(\psi_+)$ ,  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)$ , d'une structure de  $R(\lambda')$ -module compatibles avec l'action de  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ , ceci apparaît à la page 577 de [Knapp et Vogan 1995]. Il résulte de ceci que les  $\mathcal{A}'_{\underline{d}}(\psi_+)$ ,  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)$  sont des  $R(\mu - \delta)$ -modules nuls ou simples, les non nuls étant inéquivalents deux à deux. La proposition 8.31 de [Knapp et Vogan 1995] a en fait pour but d'énoncer un critère pour en déduire que ce sont des  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -modules nuls ou simple, il suffit que l'application naturelle  $\varphi$  de  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  dans  $R(\mu - \delta)$  soit surjective. Or c'est le cas pour les groupes unitaires, cela vient du fait que les orbites nilpotentes en type A sont de Richardson avec une application moment birationnelle et sont d'adhérence normale [Kraft et Procesi 1979]. C'est ainsi que l'on montre que les  $A_q(\lambda)$ -modules dans le weakly fair range sont nuls ou irréductibles pour les groupes unitaires. Ce que nous venons de remarquer ici, c'est que l'inspection de la démonstration montre en plus que les modules  $\mathcal{A}'_{\underline{d}}(\psi)$ ,  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi)$  non nuls ne sont pas équivalents en tant que  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -modules et ceci termine la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 4.5.** La définition des paquets d'Arthur par les identités de transfert endoscopiques suppose avoir choisi parmi les formes réelles fortes (au sens de [Adams et al. 1992])  $U_t$ ,  $t \in T[2]$ , introduites ci-dessus, une forme quasi-déployée, et pour celle-ci, une donnée de Whittaker. Ici, la forme quasi-déployée choisie est donné par

$$t_* = (1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{N-1})$$

et est donc isomorphe à  $U(N/2, N/2)$  si  $N$  est pair et  $U(\lfloor N/2 \rfloor + 1, \lfloor N/2 \rfloor)$  si  $N$  est impair. D'autre part, on peut considérer un paramètre de séries discrètes  $\psi_G$ , pour les groupes unitaires de rang  $N$ , c'est-à-dire avec  $\psi = \bigoplus_{i=1}^N (\chi_{t_i} \boxtimes R[1])$  avec les  $t_i$  distincts. Les constructions faites ci-dessus pour  $\underline{d} \in \mathcal{D}(\psi) = ((1, 0), (0, 1), (1, 0), \dots)$  déterminent une série discrète générique de ce groupe unitaire quasi-déployé, et l'on fixe la donnée de Whittaker pour que cette série discrète admette une fonctionnelle de Whittaker. Des choix différents mèneraient à une formule différente en (1-3) en tordant la paramétrisation par un caractère de  $A(\psi_G)$ . Voir [Mœglin et Renard 2017] pour une discussion analogue pour les groupes classiques.

## 5. Réduction au cas de bonne parité

**5A. Mauvaise parité et induction parabolique.** Dans cette section, nous démontrons des résultats énoncés sans démonstration dans [Mœglin et Renard 2017] ainsi que leurs analogues pour les groupes unitaires. Soient  $G$  un groupe classique ou unitaire, et  $\psi_G, \psi$  comme dans la section 2. Considérons une décomposition de  $\psi$  de la forme :

$$(5-1) \quad \psi = \rho \oplus \rho^* \oplus \psi'$$

où, dans  $\rho$ , il n'apparaît que des facteurs de mauvaise parité. Ici  $\rho^*$  désigne la représentation contragrédiente si  $\mathbf{G}$  est un groupe classique, et la duale hermitienne si  $\mathbf{G}$  est un groupe unitaire. Remarquons que toute la partie de mauvaise parité peut se mettre sous la forme  $\rho \oplus \rho^*$ .

Si  $\mathbf{G}$  est classique, le paramètre  $\psi'$  se factorise par le  $L$ -groupe d'un groupe classique quasi-déployé  $\mathbf{G}^b$  de même type que  $\mathbf{G}$ . Soit  $\psi_{\mathbf{G}^b}$  le paramètre d'Arthur pour le groupe  $\mathbf{G}^b$  tel que  $\psi' = \mathbf{Std}_{\mathbf{G}'} \circ \psi_{\mathbf{G}^b}$ . De même, si  $\mathbf{G}$  est unitaire,  $\psi'$  est la restriction à  $\mathbb{C}^\times \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  d'un paramètre  $\psi_{\mathbf{G}'}$  pour un groupe unitaire quasi-déployé  $\mathbf{G}^b$  de rang plus petit.

Notons  $N_\rho$  la dimension de la représentation  $\rho$ . Si  $\mathbf{G}$  est classique,  $c$ 'est une représentation de  $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ , et l'on note  $\Pi_\rho^{\mathbf{GL}}$  la représentation de  $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{R})$  de paramètre d'Arthur  $\rho$  (cf. [Arancibia et al. 2018, §3.1]). Si  $\mathbf{G}$  est unitaire,  $c$ 'est une représentation de  $\mathbb{C}^\times \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ , et l'on note  $\Pi_\rho^{\mathbf{GL}}$  la représentation de  $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C})$  de paramètre d'Arthur  $\rho$ . Pour unifier les notations, on note simplement  $\mathbf{GL}_{N_\rho}$  pour le groupe  $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{R})$  si l'on est dans le cadre des groupes classiques, et  $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C})$  si l'on est dans le cadre des groupes unitaires.

Selon la forme intérieure  $G$  et la dimension  $N_\rho$  de  $\rho$ , le groupe  $G$  admet ou pas un sous-groupe de Levi maximal standard  $M$  isomorphe à  $\mathbf{GL}_{N_\rho} \times G'$ , où  $G'$  est une forme intérieure de  $\mathbf{G}^b$ . Par exemple, si  $G = \mathbf{U}(p, q)$ , la condition est que  $\inf(p, q) \geq N_\rho$ , et si  $c$ 'est le cas, on a  $G' = \mathbf{U}(p - N_\rho, q - N_\rho)$ , et on a la même condition si  $G = \mathbf{SO}(p, q)$ . Si  $\mathbf{G}$  est quasi-déployé, la condition est toujours vérifiée avec  $G' = \mathbf{G}^b$ , et ceci fournit une injection

$$(5-2) \quad \iota : {}^L M = (\widehat{\mathbf{GL}_{N_\rho}} \times \widehat{\mathbf{G}^b}) \rtimes W_{\mathbb{R}} \hookrightarrow {}^L G$$

de sorte que  $\psi_G = \iota \circ \psi_M$  où  $\psi_M : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L M$  est construit à partir de  $\rho$  et  $\psi_{\mathbf{G}^b}$ . Ici  $\widehat{\mathbf{GL}_{N_\rho}} = \mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$  si  $\mathbf{GL}_{N_\rho} = \mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{R})$  et  $\widehat{\mathbf{GL}_{N_\rho}} = \mathbf{GL}_N(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$  si  $\mathbf{GL}_{N_\rho} = \mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C})$ .

Comme le groupe  $\mathbf{G}^b$  ne joue pas de rôle dans ce qui suit, on note plutôt  $\psi_{\mathbf{G}'}$  pour  $\psi_{\mathbf{G}^b}$  du moins si la condition d'existence de  $\mathbf{G}'$  est satisfaite. On vérifie facilement l'énoncé suivant.

**Remarque 5.1.** Les groupes  $A(\psi_G)$  et  $A(\psi_{\mathbf{G}'})$  sont naturellement isomorphes.

Reprenons les notations de l'introduction, où pour un paramètre d'Arthur  $\psi_G$  pour le groupe  $G$ , nous avons noté  $\pi^A(\psi_G)$  la représentation unitaire de longueur finie de  $G \times A(\psi_G)$  attachée à  $\psi_G$ . On la note aussi  $\pi^A(\psi_G, G)$ . On décompose maintenant cette représentation selon les caractères du groupe abélien fini  $A(\psi_G)$  :

$$(5-3) \quad \pi^A(\psi, G) = \bigoplus_{\eta \in \widehat{A(\psi_G)}} \pi(\psi_G, \eta, G) \boxtimes \eta$$

où les  $\pi(\psi_G, \eta, G)$  sont maintenant des représentations unitaires de longueur finie de  $G$ .

**Proposition 5.2.** *Avec les notations ci-dessus, si la condition d'existence de la forme intérieure  $\mathbf{G}'$  n'est pas vérifiée, on a  $\pi^A(\psi_G) = 0$ .*

*Si la condition d'existence de la forme intérieure  $\mathbf{G}'$  est vérifiée, soit  $\eta \in \widehat{A(\psi_G)}$  et soient  $\pi(\psi_G, \eta, G)$  et  $\pi(\psi_{G'}, \eta, G')$  les représentations semi-simples de  $G$  et  $G'$  respectivement attachées par Arthur (cf. (5-3), où pour  $\pi(\psi_{G'}, \eta, G')$  on tient compte de la remarque ci-dessus). On a alors*

$$(5-4) \quad \pi(\psi_G, \eta, G) = \text{Ind}_P^G(\Pi_\rho^{\mathbf{GL}} \otimes \pi(\psi_{G'}, \eta, G')),$$

où  $P$  est un sous-groupe parabolique standard maximal de  $G$  de facteur de Levi  $M$  isomorphe à  $\mathbf{GL}_{N_p} \times G'$ .

Pour les groupes classiques, c'est la proposition 4.3 de [Mœglin et Renard 2017], énoncée sans démonstration.

*Démonstration.* Notons  $\pi^B(\psi_G, \eta, G)$  la représentation induite du membre de droite dans (5-4), et

$$\pi^B(\psi_G, G) = \bigoplus_{\eta \in \widehat{A(\psi_G)}} \pi^B(\psi_G, \eta, G) \boxtimes \eta.$$

Nous avons besoin de savoir que  $\pi^B(\psi_G, G)$  est non nul si  $G$  est quasi-déployé avant de pouvoir démontrer que cette représentation est  $\pi^A(\psi_G, G)$ . Évidemment si  $G$  est quasi-déployé, on a remarqué que la condition d'existence de  $\mathbf{G}'$  est toujours satisfaite, et que  $\mathbf{G}' = \mathbf{G}^b$  est quasi-déployé. Ainsi  $\pi^B(\psi_G, G)$  est non nul si et seulement si  $\pi^A(\psi_{G'}, G')$  est non nul. Or on sait que le paquet  $\Pi^A(\psi_{G'}, G')$  est non nul, car il contient au moins les représentations dans le paquet de Langlands associé au paquet d'Arthur. Ceci montre l'assertion voulue. Considérons alors la représentation virtuelle stable  $\pi^A(\psi_{G'}, G')(s_{\psi'}) = [\pi(\psi_{G'}, G')]$ , où  $s_{\psi'} = \psi'(1, -\text{Id})$  (cf. ([Mœglin et Renard 2017, (2.3.3)]). Elle vérifie l'identité endoscopique tordue [Mœglin et Renard 2017, (3.2.4)]. Comme le transfert endoscopique tordu commute avec l'induction, on obtient que le transfert tordu de la représentation virtuelle  $\pi^B(\psi_G, G)(s_\psi)$  est la trace tordue de l'induite pour le parabolique standard de  $\mathbf{GL}_N$  de Levi standard  $\mathbf{GL}_{N_p} \times \mathbf{GL}_{N'}$  de la représentation  $\Pi_\rho^{\mathbf{GL}} \boxtimes \Pi_{\psi'}^{\mathbf{GL}}$ . Or cette induite est  $\Pi_\psi^{\mathbf{GL}}$ , d'après la définition des paquets d'Arthur des groupes linéaires (voir [Arancibia et al. 2018, section 3.2]). D'autre part  $\pi^A(\psi_G, G)(s_\psi) = [\pi(\psi_G, G)]$  vérifie aussi l'identité endoscopique tordue. On obtient donc que  $\pi^A(\psi_G, G)(s_\psi) = \pi^B(\psi_G, G)(s_\psi)$ , puisque ces deux représentations virtuelles stables ont même transfert endoscopique tordu.

Nous allons démontrer que  $\pi^B(\psi_G, G)$  vérifie aussi les identités endoscopiques ordinaires [Mœglin et Renard 2017, (2.3.5)]. On ne suppose plus que  $G$  est quasi-déployé, mais l'on suppose que la condition d'existence de  $\mathbf{G}'$  est satisfaite, car sinon, il est clair que  $\pi^A(\psi_G, G) = 0$ . Soit  $\mathbf{H} = (H, x, \xi : {}^L H \rightarrow {}^L G, \dots)$  une donnée endoscopique elliptique de  $G$  (cf. [Arthur 2013]) telle que  $\psi_G$  se factorise par le groupe dual de  $H$  et on fixe une telle factorisation  $\psi_G = \xi \circ \psi_x$ . En particulier

l'élément  $x \in {}^L G$  s'identifie à un élément du commutant de  $\psi_G$ . Il faut alors démontrer qu'il existe une donnée endoscopique elliptique  $\mathbf{H}' = (H', x', \dots)$  de  $G'$ , tel que l'élément  $x'$  de cette donnée soit dans le centralisateur de  $\psi_{G'}$  et tel que le transfert de la distribution stable associée à  $\mathbf{H}$  et à la factorisation de  $\psi_G$  soit l'induite du produit tensoriel des données analogues pour  $\psi_{G'}$  et  $\mathbf{H}'$  et de la représentation  $\Pi_\rho^{\mathbf{GL}}$ . Expliquons maintenant comment construire explicitement cette donnée endoscopique  $\mathbf{H}'$ . Comme il est loisible de le faire ici, on suppose que  $x$  vérifie  $x^2 = 1$ . On décompose alors  $\psi$  en  $\psi_+ \oplus \psi_-$  suivant les valeurs propres de  $x$ . On remarque que l'on a aussi une décomposition analogue pour  $\psi'$  et pour  $\rho$ . On a alors

$$\psi_+ = \rho_+ \oplus \rho_+^* \oplus \psi'_+$$

et une décomposition analogue avec  $+$  remplacé par  $-$ . C'est ici qu'a servi l'hypothèse sur la mauvaise parité des composantes de  $\rho$ , pour que le dual de  $\rho_+$  apparaisse lui aussi dans l'espace propre de valeur propre  $+1$ . Notons  $N_{\rho_\pm}$  les dimensions des représentations  $\rho_\pm$ , et  $\Pi_{\rho_\pm}^{\mathbf{GL}}$  la représentation de  $\mathbf{GL}_{N_{\rho_\pm}}$  associée à ce paramètre. On a bien sûr  $N_\rho = N_{\rho_+} + N_{\rho_-}$  et  $\Pi_\rho^{\mathbf{GL}}$  est l'induite parabolique de  $\Pi_{\rho_+}^{\mathbf{GL}} \boxtimes \Pi_{\rho_-}^{\mathbf{GL}}$ .

Ainsi il existe un sous-groupe de Levi

$$M_H \simeq (\mathbf{GL}_{N_{\rho_+}} \times M^+) \times (\mathbf{GL}_{N_{\rho_-}} \times M^-)$$

de  $H$  tel que  $\psi_x$  se factorise par le  $L$ -groupe de  $M_H$  et la représentation virtuelle stable  $[\pi(\psi_x, H)]$  de  $H$  associée à  $\psi_x$  est une induite à partir de ce Levi. Notons  $H'$  le facteur  $M^+ \times M^-$  de  $M$  : c'est un groupe endoscopique pour  $G'$ , s'inscrivant dans une donnée endoscopique  $\mathbf{H}' = (H', x', \xi', \dots)$  de  $G'$  et le paramètre d'Arthur  $\psi_{G'}$  se factorise en  $\xi' \circ \psi_{x'}$ . L'élément  $x'$  est dans le centralisateur de  $\psi_{G'}$ , on peut le prendre tel que  $x'^2 = 1$  et  $\psi' = \psi'^+ \oplus \psi'^-$  est la décomposition de  $\psi'$  selon les valeurs propres  $\pm 1$  de  $x'$ . Partons de la représentation stable  $[\pi(\psi_{x'}, H')]$  associée à  $\psi_{x'}$ . On peut d'abord considérer son transfert endoscopique vers  $G'$ , puis induire vers  $G$  avec  $\Pi_\rho^{\mathbf{GL}}$  :

$$\text{Ind}_{P=MN}^G (\Pi_\rho^{\mathbf{GL}} \boxtimes \text{Trans}_{H'}^{G'}([\pi(\psi_{x'}, H')])) ,$$

où  $\text{Trans}_{H'}^{G'}$  désigne le transfert endoscopique (spectral) du groupe endoscopique  $H'$  de  $G'$  vers  $G'$ . Or, ceci est égal à

$$\text{Ind}_{P=MN}^G (\Pi_\rho^{\mathbf{GL}} \boxtimes \pi^A(\psi_{G'}, H')(s_{\psi'} x')) = \pi^B(\psi_G, G)(s_{\psi} x).$$

Le fait que le transfert commute à l'induction nous dit que l'on obtient le même résultat en prenant le produit tensoriel extérieur avec  $\Pi_{\rho_+}^{\mathbf{GL}}$  et  $\Pi_{\rho_-}^{\mathbf{GL}}$  pour obtenir une représentation virtuelle de  $M_H$  que l'on induit vers  $H$ , puis en prenant ensuite le transfert endoscopique de  $H$  vers  $G$  :

$$\text{Trans}_H^G (\text{Ind}_{P_h=M_H N_H}^H (\Pi_{\rho_+}^{\mathbf{GL}} \boxtimes \Pi_{\rho_-}^{\mathbf{GL}} \boxtimes [\pi(\psi_{x'}, G')])) .$$

Or ceci est égal à

$$\text{Trans}_H^G([\pi(\psi_x, H)]) = \pi^A(\psi_G, G)(s_\psi x).$$

On obtient donc que  $\pi^B(\psi_G, G)(s_\psi x) = \pi^A(\psi_G, G)(s_\psi x)$ . Comme on a ceci pour tout  $x \in A(\psi_G)$ , que  $G$  soit ou non quasi-déployé, on en déduit par inversion de Fourier que  $\pi^B(\psi_G, G) = \pi^A(\psi_G, G)$ .  $\square$

**5B. Irréductibilité de l'induite parabolique pour les groupes unitaires.** Nous allons reformuler la [proposition 5.2](#) de manière un peu plus explicite pour les groupes unitaires, en y ajoutant un résultat d'irréductibilité des induites paraboliques.

**Théorème 5.3.** *Soient  $\psi_G$  un  $A$ -paramètre pour  $G = \mathbf{U}(p, q)$ ,  $\psi$  sa restriction à  $\mathbb{C}^\times \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  comme en (2-4) et  $\psi_{\text{bp}}$  la partie de bonne parité de ce paramètre. Soient  $N = p + q$  et  $N_{\text{bp}}$  comme en (2-6). En particulier  $N - N_{\text{bp}}$  est pair, et l'on pose  $a_{\text{mp}} = (N - N_{\text{bp}})/2$ , c'est le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{E}'(\psi)$ . On a alors :*

- (i) *Si  $\inf(p, q) < a_{\text{mp}}$ , alors  $\pi^A(\psi_G, G) = 0$ .*
- (ii) *Si  $\inf(p, q) \geq a_{\text{mp}}$  on pose  $p_{\text{bp}} = p - a_{\text{mp}}$ ,  $q_{\text{bp}} = q - a_{\text{mp}}$  et  $\psi_{\text{bp}}$  est la restriction à  $\mathbb{C}^\times \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  d'un paramètre  $\psi_{G_{\text{bp}}}$  pour  $G_{\text{bp}} = \mathbf{U}(p_{\text{bp}}, q_{\text{bp}})$ . On a donc une représentation unitaire  $\pi^A(\psi_{G_{\text{bp}}}, G_{\text{bp}})$  de  $\mathbf{U}(p_{\text{bp}}, q_{\text{bp}}) \times A(\psi_{G_{\text{bp}}})$ , qui s'écrit*

$$\pi^A(\psi_{G_{\text{bp}}}, G_{\text{bp}}) = \bigoplus_{\eta \in A(\widehat{\psi_{G_{\text{bp}}})}} \pi(\psi_{G_{\text{bp}}}, \eta, G_{\text{bp}}) \boxtimes \eta.$$

Alors  $\pi^A(\psi_G, G)$  s'écrit  $\pi^A(\psi_G, G) = \bigoplus_{\eta \in A(\widehat{\psi})} \pi(\psi_G, \eta, G) \boxtimes \eta$ , avec pour tout  $\eta \in A(\psi_G)$  (rappelons qu'en vertu de la [remarque 5.1](#), on peut identifier  $A(\psi_{G_{\text{bp}}})$  et  $A(\psi_G)$ ),

$$\pi(\psi_G, \eta, G) = \text{Ind}_P^G \left( \left( \bigotimes_{(t,s,a) \in \mathcal{E}'(\psi)} \chi_{t,s,a} \right) \boxtimes \pi(\psi_{G_{\text{bp}}}, \eta, G_{\text{bp}}) \right)$$

pour le sous-groupe parabolique standard  $P$  de  $\mathbf{U}(p, q)$  dont le sous-groupe de Levi est  $\prod_{(t,s,a) \in \mathcal{E}'(\psi)} \mathbf{GL}(a, \mathbb{C}) \times \mathbf{U}(p_{\text{bp}}, q_{\text{bp}})$ .

De plus, si  $\tau$  est une sous-représentation irréductible de  $\pi(\psi_{G_{\text{bp}}}, \eta, G_{\text{bp}})$ , alors  $\text{Ind}_P^G \left( \left( \bigotimes_{(t,s,a) \in \mathcal{E}'(\psi)} \chi_{t,s,a} \right) \boxtimes \tau \right)$  est irréductible.

*Démonstration.* Seule la dernière assertion est nouvelle par rapport à la proposition. Les représentations  $\tau$  de la dernière assertion du théorème sont les représentations  $\mathcal{A}_d(\psi_{\text{bp}})$  de la [section 4](#) attachée à la partie de bonne parité du paramètre. Il est démontré dans [[Matumoto 1996](#), Theorem 3.2.2(2)] que l'induite parabolique de

$$\left( \bigotimes_{(t,s,a) \in \mathcal{E}'(\psi)} \chi_{(t,s,a)} \right) \boxtimes \mathcal{A}_d(\psi_{\text{bp}})$$

est irréductible, ce qui est exactement l'assertion voulue.  $\square$

**5C. Irréductibilité de l'induction parabolique pour les groupes classiques.** Nous complétons maintenant la [proposition 5.2](#) pour les groupes classiques en y ajoutant le fait que, comme pour les groupes unitaires, l'induction parabolique préserve l'irréductibilité. Ce résultat avait été énoncé sans démonstration dans [\[Mœglin et Renard 2017, théorème 4.4\]](#).

**Théorème 5.4.** *On se place dans les hypothèses de la [proposition 5.2](#). On suppose que la condition d'existence de la forme intérieure  $G'$  est vérifiée. Soit  $\eta \in \widehat{A(\psi_G)}$ . Si  $\tau$  est une sous-représentation irréductible de  $\pi(\psi_{G'}, \eta, G')$ , alors  $\text{Ind}_P^G(\Pi_\rho^{\text{GL}} \boxtimes \tau)$  est irréductible.*

Rappelons que pour un groupe classique  $G$ , la mauvaise parité est : impaire si  $\widehat{G}$  est un groupe spécial orthogonal, paire si  $\widehat{G}$  est un groupe symplectique. On écrit la partie de mauvaise parité  $\rho$  (cf. [\[Mœglin et Renard 2017, §4.1\]](#)) sous la forme

$$\rho = \bigoplus_{i=1, \dots, \ell} \delta_{t_i, s_i} \boxtimes R[a_i] \oplus \bigoplus_{j=1, \dots, \ell'} \eta_{\epsilon_j, s_j} \boxtimes R[a'_j].$$

Dans la première somme,  $t_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $s_i \in i\mathbb{R}$ , et  $\delta_{t_i, s_i}$  est le paramètre de Langlands de la série discrète de caractère infinitésimal  $((t_i + s_i)/2, (-t_i + s_i)/2)$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ , et si  $s_i = 0$ , alors  $t_i + a_i - 1$  est de mauvaise parité. Dans la seconde somme  $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ ,  $s_j \in i\mathbb{R}$ , et  $\eta_{\epsilon_j, s_j}$  est le paramètre de Langlands du caractère  $x \mapsto \mathbf{sgn}(x)^{(1-\epsilon_j)/2} |x|^{s_j}$  de  $\text{GL}_1(\mathbb{R})$ , et si  $s_j = 0$ , alors  $a'_j - 1$  est de mauvaise parité. On note encore  $\delta_{t_i, s_i}$  et  $\eta_{\epsilon_j, s_j}$  les représentations de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  et  $\text{GL}_1(\mathbb{R})$  dont ce sont les paramètres. Pour chaque indice  $i$ , on considère la représentation de Speh, notée  $\mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i)$  de  $\text{GL}_{2a_i}(\mathbb{R})$  qui est irréductible et unitaire, et pour chaque indice  $j$ , le caractère unitaire  $\eta_{\epsilon_j, s_j} \circ \det$  de  $\text{GL}_{a'_j}(\mathbb{R})$ . La représentation  $\Pi_\rho^{\text{GL}}$  est alors obtenue par induction parabolique irréductible à partir de la représentation

$$\left( \bigotimes_{i=1, \dots, \ell} \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \boxtimes \left( \bigotimes_{j=1, \dots, \ell'} \eta_{\epsilon_j, s_j} \circ \det \right)$$

du facteur de Levi

$$\left( \prod_{i=1, \dots, \ell} \text{GL}_{2a_i}(\mathbb{R}) \right) \times \left( \prod_{j=1, \dots, \ell'} \text{GL}_{a'_j}(\mathbb{R}) \right)$$

de  $\text{GL}_{N_\rho}(\mathbb{R})$ .

Soit  $G_0$  le groupe de même type que  $G$  tel que  $\text{GL}_{N_\rho}(\mathbb{R}) \times G_0$  est un sous-groupe de Levi d'un parabolique  $P$  de  $G$ . On note  $\tau_0$  une représentation unitaire irréductible de  $G_0$ . On note  $N_0$  son rang. On suppose que le caractère infinitésimal de  $\tau_0$  a bonne parité, c'est-à-dire qu'il est formé d'entiers si la demi-somme des racines positive de  $G_0$  est formée d'entiers et est formé de demi-entiers non entiers sinon. Le fait que  $\tau_0$  soit unitaire n'est absolument pas nécessaire mais simplifie légèrement la preuve. Le théorème résulte alors de la proposition plus générale suivante.

**Proposition 5.5.** *La représentation induite  $\text{Ind}_P^G(\Pi_\rho^{\text{GL}} \boxtimes \tau_0)$  est irréductible.*

*Démonstration.* On note  $\pi = \text{Ind}_P^G(\Pi_\rho^{\text{GL}} \boxtimes \tau_0)$ . Nous allons scinder la démonstration en plusieurs étapes.

Première étape. Pour tout  $j \in [1, \ell']$ , on remplace  $\eta_{\epsilon_j, s_j} \boxtimes R[a'_j]$  dans la partie de mauvaise parité  $\rho$  par

$$(\eta_{\epsilon_j, s_j} \boxtimes R[a'_j]) \oplus (\eta_{-\epsilon_j, s_j} \boxtimes R[a'_j]).$$

On obtient ainsi un paramètre  $\rho^\sharp$  de dimension plus grande, et toujours de mauvaise parité, et il est clair que la proposition est vraie pour  $\rho$  si elle l'est pour  $\rho^\sharp$ . Remarquons que l'on peut poser  $\eta_{\epsilon_j, s_j} \oplus \eta_{-\epsilon_j, s_j} = \delta_{0, s_j}$  (la limite de séries discrètes  $\delta_{0, s_j}$  de  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  est l'induite de  $\eta_{\epsilon_j, s_j} \boxtimes \eta_{-\epsilon_j, s_j}$ ). Ainsi, on peut supposer que  $\rho = \bigoplus_{i=1, \dots, \ell} \delta_{t_i, s_i} \boxtimes R[a_i]$ , mais il est maintenant possible que certains  $t_i$  soient nuls. La dimension  $N_\rho$  de  $\rho$  est paire, et l'on pose  $N'_\rho = N_\rho/2 = \sum_i a_i$ . On change maintenant légèrement les notations,  $P = MN$  désigne maintenant le sous-groupe parabolique standard de  $G$  de facteur de Levi isomorphe à  $(\prod_i \mathbf{GL}_{2a_i}(\mathbb{R})) \times G_0$ . La représentation  $\pi$  est donc avec ces notations

$$\pi = \text{Ind}_P^G \left( \left( \bigotimes_i \text{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \boxtimes \tau_0 \right).$$

Deuxième étape. Les représentations  $\text{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i)$  sont obtenues à partir du caractère  $\chi_{t_i, s_i, a_i}$  de  $\mathbf{GL}_{a_i}(\mathbb{C})$  par induction cohomologique. Ceci est bien connu, voir par exemple [Knapp et Vogan 1995, p. 586], et l'on utilise ici la version normalisée de l'induction cohomologique [loc. cit., (11.150b)]. Ainsi,  $\pi$  est obtenue en deux étapes, d'abord une induction cohomologique, puis une induction parabolique. Le théorème de transfert du chapitre 11 de [loc. cit.] permet d'échanger l'ordre de ces deux inductions. Une référence commode pour cela est [Matumoto 2004, Theorem 2.2.3], qui nous donne exactement l'énoncé voulu. Donnons les détails. Matumoto introduit la terminologie de  $\sigma\theta$ -paire pour un couple  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$  de sous-algèbres paraboliques de  $G$ . La sous-algèbre  $\mathfrak{p}$  est la complexifiée de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$ , qui ici a été fixée à la fin de la première étape. La sous-algèbre  $\mathfrak{q}$  est une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable. On pose  $L = \text{Norm}_G(\mathfrak{q})$ . On choisit ici cette sous-algèbre de sorte que d'une part  $L$  soit isomorphe à  $U(N'_\rho, N'_\rho) \times G_0$  et que d'autre part la condition S2 de la définition 2.1.1 de [Matumoto 2004] soit vérifiée, c'est-à-dire que  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$  contient une sous-algèbre de Cartan  $\sigma$  et  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ . Il est facile de vérifier que l'on trouve une telle sous-algèbre  $\mathfrak{q}$ , en partant d'un sous-groupe de Cartan isomorphe à  $(\mathbb{C}^\times)^{N'_\rho} \times U(1)^{N_0}$  de  $M$ . On adopte les notations de Matumoto, qui sont usuelles ( $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ , etc.). On a ainsi

$$\pi = \text{Ind}_P^G \left( \left( {}^n \mathcal{R}_{\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m}, L \cap M \cap K}^{\mathfrak{m}, M \cap K} \right)^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{l})} \left( \bigotimes_i \chi_{t_i, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right).$$

Remarquons que ici  $L \cap M$  est isomorphe à  $(\prod_i \mathbf{GL}_{a_i}(\mathbb{C})) \times G_0$ . Le résultat de Matumoto nous permet alors d'écrire, sous certaines conditions de positivité des paramètres,

$$\pi = (\mathcal{R}_{q, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})} \left( \text{Ind}_{P \cap L}^L \left( \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right) \otimes \mathbb{C}_{-\delta(\mathfrak{u})} \right) \right).$$

Ici, on a simplifié la formulation de Matumoto, en utilisant le fait que le groupe  $L \cap M$  est connexe, et ainsi le caractère noté  $\mathbb{C}_{\delta(\bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{u})}$  par Matumoto venant de la normalisation subtile des foncteurs d'induction cohomologique dans [Knapp et Vogan 1995] coïncide ici avec  $\mathbb{C}_{\delta(\bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{u})}$  (en général ces deux caractères sont seulement égaux sur la composante neutre de  $L \cap M$ ). D'autre part, si l'on suppose les  $t_i$  suffisamment grand, les hypothèses de positivité dans le théorème de Matumoto sont vérifiées.

On veut montrer que  $\pi$  est irréductible. Or, avec les  $t_i$  suffisamment grand, l'induction cohomologique  $(\mathcal{R}_{q, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})}$  se fait dans le good range et préserve donc l'irréductibilité. Il suffit alors de démontrer que  $\text{Ind}_{P \cap L}^L \left( \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right) \otimes \mathbb{C}_{-\delta(\mathfrak{u})} \right)$  est irréductible. Or

$$\text{Ind}_{P \cap L}^L \left( \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right) \otimes \mathbb{C}_{-\delta(\mathfrak{u})} \right) = \left( \text{Ind}_{P'}^{U(N'_\rho, N'_\rho)} \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i, s_i, a_i} \right) \otimes \mathbb{C}_{-\delta(\mathfrak{u})} \right) \right) \boxtimes \tau_0$$

Ici  $P'$  est un sous-groupe parabolique de  $U(N'_\rho, N'_\rho)$  de facteur de Levi isomorphe à  $\prod_i \mathbf{GL}_{a_i}(\mathbb{C})$  (ce dernier se plonge naturellement dans  $\mathbf{GL}_{N'_\rho}(\mathbb{C})$  et l'on voit  $\mathbf{GL}_{N'_\rho}(\mathbb{C})$  comme le Levi du parabolique de Siegel). On est ramené à montrer l'irréductibilité de  $\text{Ind}_{P'}^{U(N'_\rho, N'_\rho)} \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i, s_i, a_i} \right) \otimes \mathbb{C}_{-\delta(\mathfrak{u})} \right)$ . Ceci découle de la dernière assertion du [théorème 5.3](#) car l'hypothèse de mauvaise parité pour le groupe unitaire  $U(N'_\rho, N'_\rho)$  est vérifiée, comme on le montre ci-dessous.

On calcule le caractère de torsion  $\mathbb{C}_{-\delta(\mathfrak{u})}$ . Posons  $\epsilon_G = 0$  si  $G$  est un groupe orthogonal pair,  $\epsilon_G = 1$  si  $G$  est un groupe symplectique, et  $\epsilon_G = \frac{1}{2}$  si  $G$  est un groupe orthogonal impair. Dans le système de coordonnées usuelles pour  $G$ , on a

$$\delta(\mathfrak{u}) = \left( \underbrace{N - N'_\rho - \frac{1}{2} + \epsilon_G, \dots, N - N'_\rho - \frac{1}{2} + \epsilon_G}_{N_\rho}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N_0} \right).$$

L'hypothèse de mauvaise parité des  $(t_i, s_i, a_i)$  pour  $G$  est : soit  $s_i \neq 0$ , soit  $s_i = 0$  et  $(t_i + a_i - 1)/2 + \epsilon_G \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ . Dans les deux cas,  $(t_i + N - N'_\rho - \frac{1}{2} + \epsilon_G, s_i, a_i)$  est de mauvaise parité pour  $U(N'_\rho, N'_\rho)$ , car dans le second cas

$$\frac{1}{2}(t_i + a_i - 1) + N - N'_\rho - \frac{1}{2} + \epsilon_G + \frac{1}{2}(2N'_\rho - 1) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}.$$

Ceci termine la deuxième étape où l'on a établi le résultat voulu si la condition que les  $t_i$  soient suffisamment grands.

Troisième étape. On ne suppose plus ici que les  $t_i$  sont suffisamment grand, mais on choisit  $T$  suffisamment grand pour que la représentation  $\pi_T$  obtenue en remplaçant

les  $t_i$  par  $t_i + T$  soit irréductible d'après la deuxième étape. C'est-à-dire que l'on pose

$$\begin{aligned} \pi_T &= \text{Ind}_P^G \left( \left( \bigotimes_i \text{Speh}(\delta_{t_i+T, s_i}, a_i) \right) \boxtimes \tau_0 \right) \\ &= \text{Ind}_P^G \left( \left( {}^n \mathcal{R}_{\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m}, L \cap M \cap K}^{\mathfrak{m}, M \cap K} \right)^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k})} \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i+T, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right) \right) \end{aligned}$$

On veut montrer que  $\pi$  s'obtient de  $\pi_T$  par un foncteur de translation [Knapp et Vogan 1995, Chapter 7], c'est-à-dire que l'on obtient  $\pi$  en tensorisant  $\pi_T$  par une représentation de dimension finie  $F$  de  $G$ , et l'on projette sur la composante de caractère infinitésimal généralisé le caractère infinitésimal de  $\pi$ . On note  $n_0$  le rang de  $G_0$ . Le rang de  $G$  est donc  $n_0 + N_\rho = n_0 + 2N'_\rho$ .

On choisit une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  et un système de racines positives  $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . On considère la représentation de dimension finie  $F$ , de  $G$  de plus haut poids

$$\left( \underbrace{T/2, \dots, T/2}_{2N'_\rho}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_0} \right).$$

On remarque que cette représentation admet le poids extrémal

$$\mu_0 := \left( \underbrace{-T/2, \dots, -T/2}_{N'_\rho}, \underbrace{T/2, \dots, T/2}_{N'_\rho}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_0} \right).$$

On note  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}'$  la sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  qui stabilise le sous-espace poids  $\mu_0$  de  $F$  (qui est de dimension 1 car  $\mu_0$  est extrémal). Son facteur de Levi  $\mathfrak{m}'$  est isomorphe à  $\mathfrak{gl}_{N'_\rho}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_{N'_\rho}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{g}_0$ . On note  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{u}'$  la sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  contenue dans  $\mathfrak{p}'$  dont la sous-algèbre de Levi  $\mathfrak{l}'$  est isomorphe à

$$\mathfrak{gl}_{a_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathfrak{gl}_{a_\ell}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_{a_\ell}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathfrak{gl}_{a_1}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{g}_0.$$

Ceci ne détermine pas  $\mathfrak{q}'$  : on a  $\mathfrak{l}' \subset \mathfrak{m}'$ ,  $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{u}'$ ,  $\mathfrak{u}' = \mathfrak{n}' \oplus (\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{u}')$  et l'on fixe  $\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{u}'$  en demandant que pour toute racine  $\beta \in \Delta(\mathfrak{u}', \mathfrak{h})$ ,

$$(5-5) \quad \beta \left( \underbrace{t_1, \dots, t_1}_{a_1}, \dots, \underbrace{t_\ell, \dots, t_\ell}_{a_\ell}, \underbrace{-t_\ell, \dots, -t_\ell}_{a_\ell}, \dots, \underbrace{-t_1, \dots, -t_1}_{a_1} \right) \leq 0.$$

On note  $\tilde{\lambda}$  le caractère infinitésimal de  $\pi$  et  $\tilde{\lambda}_T$  celui de  $\pi_T$  que l'on voit aussi comme éléments de  $\mathfrak{h}^*$ . On veut montrer que  $\pi$  s'obtient de  $\pi_T$  par le foncteur de translation défini par  $F$ , c'est-à-dire que

$$\pi = (\pi_T \otimes F)_{\tilde{\lambda}}$$

où  $(\cdot)_{\tilde{\lambda}}$  dénote la projection d'un module  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ -fini sur sa composante primaire pour le caractère infinitésimal généralisé défini par  $\tilde{\lambda}$ .

Pour cela, on suit [Vogan 1988, Proposition 4.7] en modifiant convenablement les hypothèses. On commence par montrer un analogue du lemme 4.8 de [Vogan 1988].

**Lemme 5.6.** *Soit  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  le plus haut poids d'une composante irréductible de la restriction de  $F$  à  $\mathcal{V}$ . On suppose que pour un certain  $w$  dans le groupe de Weyl de  $G$ , on a*

$$(\tilde{\lambda}_T + \mu) = w \cdot \tilde{\lambda},$$

Alors  $\mu = \mu_0$ .

*Démonstration.* On pose  $\mathfrak{h}_l = \mathfrak{h} \cap [\mathcal{V}', \mathcal{V}']$  et l'on note  $\mathfrak{z}_l$  le centre de  $\mathcal{V}'$ . On a alors

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_l \oplus \mathfrak{z}_l \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_l^* \oplus \mathfrak{z}_l^*.$$

C'est une somme directe orthogonale. Si  $\nu \in \mathfrak{h}^*$ , on note  $\nu = \nu_l \oplus \nu_3$  sa décomposition selon cette somme orthogonale. Le poids  $\mu$  s'écrit  $\mu_0 + \sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})} m_\beta \beta$ , avec les coefficients  $m_\beta$  entiers négatifs. On a donc

$$(\tilde{\lambda}_T + \mu)_3 = (\tilde{\lambda}_T + \mu_0)_3 + \sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})} m_\beta \beta_{|3_l}$$

Dans le système de coordonnées choisi,  $\tilde{\lambda}_T$  s'écrit

$$\frac{1}{2} \left( \underbrace{t_1 + T + (a_1 - 1), \dots, t_1 + T - (a_1 - 1)}_{a_1}, \dots, \underbrace{t_\ell + T + (a_\ell - 1), \dots, t_\ell + T - (a_\ell - 1)}_{a_\ell}, \right. \\ \left. \underbrace{-t_\ell - T + (a_\ell - 1), \dots, -t_\ell - T - (a_\ell - 1)}_{a_\ell}, \right. \\ \left. \underbrace{-t_1 - T + (a_1 - 1), \dots, -t_1 - T - (a_1 - 1)}_{a_1}, *, \dots, * \right)$$

où sur les dernière coordonnées, il apparaît le caractère infinitésimal de  $\tau_0$  que nous n'explicitons pas. Ainsi  $\tilde{\lambda}_T + \mu_0$  s'écrit

$$\frac{1}{2} \left( \underbrace{t_1 + (a_1 - 1), \dots, t_1 - (a_1 - 1)}_{a_1}, \dots, \underbrace{t_\ell + (a_\ell - 1), \dots, t_\ell - (a_\ell - 1)}_{a_\ell}, \right. \\ \left. \underbrace{-t_\ell + (a_\ell - 1), \dots, -t_\ell - (a_\ell - 1)}_{a_\ell}, \underbrace{-t_1 - (a_1 - 1), \dots, -t_1 - (a_1 - 1)}_{a_1}, *, \dots, * \right)$$

et  $\tilde{\lambda}_T + \mu_0 = \tilde{\lambda}$ , d'où

$$(\tilde{\lambda}_T + \mu)_3 = \tilde{\lambda}_3 + \sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})} m_\beta \beta_{|3_l}$$

et en utilisant (5-5), on en conclut

$$(5-6) \quad \|(\tilde{\lambda}_T + \mu)_3\| \leq \|\tilde{\lambda}_3\|$$

avec égalité si tous les  $m_\beta$  sont nuls.

D'autre part  $\tilde{\lambda}_T + \mu$  et  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_T + \mu_0$  ont même projection sur  $\mathfrak{h}_1$  car  $\mu - \mu_0 \in \mathfrak{h}_3^*$ . Ainsi  $\|(\tilde{\lambda}_T + \mu)_1\| = \|\tilde{\lambda}_1\|$ . Or l'hypothèse force  $\tilde{\lambda}_T + \mu$  et  $\tilde{\lambda}$  à avoir même norme, et il y a donc égalité dans (5-6), d'où  $\mu = \mu_0$ .  $\square$

Pour en déduire le fait que la translation de  $\pi_T$  est bien  $\pi$ , on raisonne comme dans [Vogan 1988], où la proposition 4.7 est déduite du lemme 4.8. Ici, on utilise le fait que pour toute représentation  $\tau$  de  $M$  et pour toute représentation de dimension finie  $F$  de  $G$ ,  $\text{Ind}_P^G(\tau) \otimes F = \text{Ind}_P^G(\tau \otimes F|_M)$ . On applique ceci à  $\tau = ({}^n\mathcal{R}_{\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m}, L \cap M \cap K}^{\mathfrak{m}, M \cap K})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k})} \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i+T, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right)$  et à  $F$  comme ci-dessus, et l'on obtient

$$\pi_T \otimes F = \text{Ind}_P^G \left( ({}^n\mathcal{R}_{\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m}, L \cap M \cap K}^{\mathfrak{m}, M \cap K})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k})} \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i+T, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right) \otimes F|_M \right).$$

Ensuite, on utilise le fait que l'induction cohomologique a lieu dans le weakly fair range, où il y a annulation des foncteurs d'induction cohomologique en degré différent de  $\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k})$ , ce qui nous permet de remplacer le foncteur  $({}^n\mathcal{R}_{\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m}, L \cap M \cap K}^{\mathfrak{m}, M \cap K})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k})}$  par  $\mathcal{R} := \sum_i (-1)^i ({}^n\mathcal{R}_{\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m}, L \cap M \cap K}^{\mathfrak{m}, M \cap K})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}) - i}$  (on obtient alors une égalité de représentations virtuelles). Ceci nous permet d'utiliser [Vogan 1981, Lemma 7.2.9(b)], et l'on a alors

$$\begin{aligned} \pi_T \otimes F &= \text{Ind}_P^G \left( \mathcal{R} \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i+T, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right) \otimes F|_M \right) \\ &= \text{Ind}_P^G \left( \mathcal{R} \left( \left( \left( \bigotimes_i \chi_{t_i+T, s_i, a_i} \right) \boxtimes \tau_0 \right) \otimes F|_{M \cap L} \right) \right). \end{aligned}$$

On remarque alors, avec les notations employées, que l'on a en fait  $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{n}$ . On conclut en remarquant que les contributions à la projection de  $\pi_T \otimes F$  sur la composante primaire  $\tilde{\lambda}$  proviennent des composantes de la restriction de  $F$  à  $\mathfrak{l}'$  de plus haut poids  $\mu$  vérifiant l'hypothèse du lemme, et que ceci donne alors le résultat voulu.

**Quatrième étape.** La translation préserve l'irréductibilité si l'image de l'algèbre enveloppante dans l'algèbre des endomorphismes  $G$ -finis de la représentation induite du caractère de  $\mathfrak{p}$  est surjective. Un critère pour cela est que l'orbite de Richardson du parabolique  $P$  soit de fermeture normale et que l'application moment soit birationnelle. Les orbites décrites par Barbasch [1989, Proposition 14.5] vérifient ces critères. La description de Barbasch en termes d'induite de Richardson s'applique directement pour nous : dans le cas des groupes symplectiques, il suffit que  $G_0$  soit trivial, et pour les groupes orthogonaux à l'inverse, il suffit que le rang de  $G_0$  soit grand par rapport aux  $a_i$ , et que la représentation  $\tau_0$  soit de dimension finie. Comme on suppose  $\tau_0$  unitaire, si  $\tau_0$  n'est pas de dimension 1, cela veut dire que  $G_0$  est un groupe compact, mais nous n'allons utiliser que le cas où  $\tau_0$  est la représentation triviale. Ainsi, on obtient l'irréductibilité de  $\pi$  à condition que  $\tau_0$  soit

la représentation triviale du groupe trivial si  $G$  est symplectique, et la représentation triviale d'un groupe  $G_0$  de rang suffisamment grand si  $G$  est orthogonal.

Cinquième étape. On revient à l'énoncé général de la proposition en utilisant toutefois la réduction effectuée dans la première étape. On a donc

$$\pi = \text{Ind}_P^G \left( \left( \boxtimes_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \boxtimes \tau_0 \right).$$

L'idée est de construire un opérateur d'entrelacement de  $\pi$  dans un module standard en position de Langlands négative, l'irréductibilité de  $\pi$  étant alors conséquence de l'injectivité de cet opérateur : rappelons que l'on a supposé  $\tau_0$  unitaire, et donc  $\pi$  est de longueur finie et unitaire, donc semi-simple, et bien sûr, le module standard en position de Langlands négative admet un unique sous-module irréductible.

Pour cela, nous allons avoir besoin de quelques considérations préliminaires sur les représentations induites des groupes généraux linéaires. Utilisons les notations usuelles pour les induites depuis les sous-groupes paraboliques standard dans les groupes généraux linéaires et classiques. Comme précédemment, notons  $\delta_{t,s}$  la représentation de  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  essentiellement de carré intégrable de caractère infinitésimal  $((-t + s)/2, (t + s)/2)$ , où  $t \in \mathbb{Z}_{>0}$  et  $s \in \mathbb{C}$  (jusque là, nous n'avons introduit que les séries discrètes, c'est-à-dire les  $\delta_{t,s}$  avec  $s \in i\mathbb{R}$ ), et notons  $\eta_{\epsilon,s}$  le caractère de  $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R})$  défini par  $x \mapsto \mathbf{sgn}(x)^{(1-\epsilon)/2} |x|^s$ ,  $\epsilon \in \pm 1$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , de caractère infinitésimal  $s$ . Si  $\delta$  est l'une de ces représentations  $\delta_{t,s}$  ou  $\eta_{\epsilon,s}$  de  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  ou  $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R})$ , notons  $\mathbb{Z}(\delta)$  l'ensemble  $(t + s)/2 + \mathbb{Z}$  dans le premier cas, et  $s + \mathbb{Z}$  dans le second. D'après un résultat de B. Speh [1981], si  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont deux représentations de cette forme, alors la représentation induite  $\delta_1 \times \delta_2$  est irréductible si  $\mathbb{Z}(\delta_1) \neq \mathbb{Z}(\delta_2)$ . En particulier, comme dans le groupe de Grothendieck on a  $\delta_1 \times \delta_2 = \delta_2 \times \delta_1$  en toute généralité, on voit dans ce cas que  $\delta_1 \times \delta_2$  et  $\delta_2 \times \delta_1$  sont isomorphes. On a des familles d'opérateurs d'entrelacements

$$M(y_1, y_2) : \delta_1 |\cdot|^{y_1} \times \delta_2 |\cdot|^{y_2} \rightarrow \delta_2 |\cdot|^{y_2} \times \delta_1 |\cdot|^{y_1}$$

et

$$N(y_1, y_2) : \delta_2 |\cdot|^{y_2} \times \delta_1 |\cdot|^{y_1} \rightarrow \delta_1 |\cdot|^{y_1} \times \delta_2 |\cdot|^{y_2}$$

méromorphes en  $(y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$ . Les compositions

$$M(y_1, y_2) \times N(y_1, y_2) \quad \text{et} \quad N(y_1, y_2) \times M(y_1, y_2)$$

sont des opérateurs scalaires donnés par une même fonction méromorphe  $\eta(y_1, y_2)$  à valeurs complexes. Cette fonction n'a pas de pôle en  $(0, 0)$  (à cause de la condition sur  $\mathbb{Z}(\delta_1)$  et  $\mathbb{Z}(\delta_2)$ ) et l'un des opérateurs  $M(y_1, y_2)$  ou  $N(y_1, y_2)$  est holomorphe en  $(0, 0)$  (celui pour lequel le terme de gauche de la flèche est en position de Langlands positive, et le terme de droite en position négative). Les opérateurs d'entrelacement

$M(0, 0)$  et  $N(0, 0)$  sont donc définis et réalisent l'isomorphisme entre  $\delta_1 \times \delta_2$  et  $\delta_2 \times \delta_1$ .

On tire de ceci le résultat suivant

**Proposition 5.7.** *Soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  des représentations irréductibles de  $\mathbf{GL}_{n_1}(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{GL}_{n_2}(\mathbb{R})$  respectivement. Supposons que pour un  $x_1 \in \mathbb{C}$ , le caractère infinitésimal de  $\tau_1$  soit formé de nombres tous dans  $x + \mathbb{Z}$ , et supposons qu'aucune composante du caractère infinitésimal de  $\tau_2$  ne soit dans  $x + \mathbb{Z}$ . Alors les représentations induites  $\tau_1 \times \tau_2$  et  $\tau_2 \times \tau_1$  de  $\mathbf{GL}_{n_1+n_2}(\mathbb{R})$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* On réalise  $\tau_1$  et  $\tau_2$  comme sous-module de représentations standards en position de Langlands négative :

$$\tau_1 \hookrightarrow \delta_{1,1} \times \cdots \times \delta_{1,r_1}, \quad \tau_2 \hookrightarrow \delta_{2,1} \times \cdots \times \delta_{2,r_2}.$$

On a une famille méromorphe d'opérateurs d'entrelacement

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(y_1, y_2) : \delta_{1,1} |\cdot|^{y_1} \times \cdots \times \delta_{1,r_1} |\cdot|^{y_1} \times \delta_{2,1} |\cdot|^{y_2} \times \cdots \times \delta_{2,r_2} |\cdot|^{y_2} \\ \rightarrow \delta_{2,1} |\cdot|^{y_2} \times \cdots \times \delta_{2,r_2} |\cdot|^{y_2} \times \delta_{1,1} |\cdot|^{y_1} \times \cdots \times \delta_{1,r_1} |\cdot|^{y_1} \end{aligned}$$

qui se factorise en un produit de composition d'opérateurs d'entrelacement élémentaires de la forme considérée avant l'énoncé de la proposition et qui sont tous holomorphes bijectifs en  $(0, 0)$ . L'opérateur  $\mathcal{M}(y_1, y_2)$  est donc holomorphe bijectif en  $(0, 0)$ .  $\square$

Revenons maintenant à notre but principal dans cette cinquième étape.

Pour tout indice  $i$ , la représentation de  $\mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i)$  est réalisée comme unique sous-module de la représentation standard :

$$S_{t_i, s_i, a_i} = \delta_{t_i, s_i} |\cdot|^{-(a_i-1)/2} \times \delta_{t_i, s_i} |\cdot|^{-(a_i-3)/2} \times \cdots \times \delta_{t_i, s_i} |\cdot|^{(a_i-3)/2} \times \delta_{t_i, s_i} |\cdot|^{(a_i-1)/2}.$$

Réalisons aussi la représentation  $\tau_0$  comme sous-module de Langlands d'une représentation standard  $\tilde{\tau}$  de  $G_0$  en position négative. Écrivons  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{--} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}}$ , où  $\tilde{\tau}_{\text{temp}}$  est tempérée irréductible, et  $\tau_{--}$  est en position de Langlands strictement négative (ici  $\tilde{\tau}_{--}$  est donc une représentation d'un produit de  $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ ), et  $\tilde{\tau}_{\text{temp}}$  une représentation d'un produit de  $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  et d'un groupe classique, le produit de ces deux facteurs formant un sous-groupe de Levi standard de  $G_0$ ). On obtient donc un plongement

$$(5-7) \quad \pi \hookrightarrow \left( \prod_i S_{t_i, s_i, a_i} \right) \times \tilde{\tau}_{--} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}}.$$

Formons maintenant une représentation standard en position négative de la manière suivante. La représentation  $\prod_i S_{t_i, s_i, a_i} \times \tilde{\tau}_{--}$  s'écrit comme un produit de représentations de la forme  $\delta |\cdot|^x$  où  $\delta$  est une série discrète de  $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R})$  ou  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  et  $x$  est un demi-entier. Remplaçons dans ce produit les termes comme ci-dessus

avec  $x > 0$  par  $\delta|\cdot|^{-x}$  et réordonnons les facteurs pour les mettre dans l'ordre des  $x$  croissants. Écrivons le produit obtenu comme étant  $\Delta_{--} \times \Delta_{\text{temp}}$  où  $\Delta_{--}$  est le produit des facteurs  $\delta|\cdot|^x$  avec  $x < 0$  et  $\Delta_{\text{temp}}$  celui avec  $x = 0$ . Notons  $\mathcal{N}$  l'opérateur d'entrelacement standard pour le groupe  $G$  qui envoie  $(\prod_i S_{t_i, s_i, a_i}) \times \tau_{--} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}}$  dans  $\Delta_{--} \times \Delta_{\text{temp}} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}}$ . L'opérateur d'entrelacement  $\mathcal{N}$  se factorise en opérateurs élémentaires, l'effet d'un opérateur élémentaire étant de remplacer un facteur  $\delta|\cdot|^x$  avec  $x > 0$  par  $\delta|\cdot|^{-x}$  ou bien un produit de la forme  $\delta_1|\cdot|^{x_1} \times \delta_2|\cdot|^{x_2}$  avec  $0 \geq x_1 > x_2$  par  $\delta_2|\cdot|^{x_2} \times \delta_1|\cdot|^{x_1}$  et ceux-ci sont bien définis (holomorphes) dans le domaine où on les considère. Notons encore  $\mathcal{N}$  la composition de  $\mathcal{N}$  avec (5-7) :

$$(5-8) \quad \mathcal{N} : \pi \hookrightarrow \left( \prod_i S_{t_i, s_i, a_i} \right) \times \tilde{\tau}_{--} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}} \rightarrow \Delta_{--} \times \Delta_{\text{temp}} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}}.$$

La représentation  $\Delta_{\text{temp}} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}}$  est une représentation tempérée d'un groupe classique, induite d'une tempérée irréductible. La théorie du  $R$ -groupe et l'hypothèse sur les parités de  $\Delta_{\text{temp}}$  (mauvaise) et de  $\tilde{\tau}_{\text{temp}}$  (bonne) nous dit que cette représentation est irréductible. D'autre part,  $\Delta_{--}$  est en position de Langlands strictement négative. Le terme de droite est donc une représentation standard en position de Langlands négative, qui admet un unique sous-module irréductible.

Ainsi, on a bien construit un opérateur d'entrelacement de  $\pi$  vers un module standard en position de Langlands négative, et il reste à montrer son injectivité. Faisons tout d'abord quelques observations sur  $\Delta_{--}$  et  $\Delta_{\text{temp}}$ . La première est formée à partir de facteurs  $\delta|\cdot|^x$  venant soit des  $S_{t_i, s_i, a_i}$ , soit de  $\tilde{\tau}_{--}$ . Mais un facteur  $\delta_1|\cdot|^{x_1}$  venant d'un  $S_{t_i, s_i, a_i}$  et un facteur  $\delta_1|\cdot|^{x_1}$  venant de  $\tilde{\tau}_{--}$  commutent, car leur produit est irréductible d'après le résultat de Speh et les hypothèses sur les parités. On a donc en fait  $\Delta_{--} = \Delta_{--}^{\text{Speh}} \times \tilde{\tau}_{--} = \tilde{\tau}_{--} \times \Delta_{--}^{\text{Speh}}$  où  $\Delta_{--}^{\text{Speh}}$  est obtenue comme ci-dessus en changeant des exposants en leurs opposés et en remettant le tout dans l'ordre, mais seulement pour les facteurs provenant des représentations de Speh. Le terme  $\Delta_{\text{temp}}$  est lui un produit de facteurs provenant des représentations de Speh. On peut donc noter  $\Delta_{\text{temp}} = \Delta_{\text{temp}}^{\text{Speh}}$  pour insister sur ce fait. D'autre part, il commute avec  $\tilde{\tau}_{--}$  en vertu du résultat de Speh invoqué ci-dessus. Ainsi (5-8) peut aussi s'écrire

$$(5-9) \quad \mathcal{N} : \pi \rightarrow \Delta_{--}^{\text{Speh}} \times \Delta_{\text{temp}}^{\text{Speh}} \times \tilde{\tau}_{--} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}}.$$

Montrons maintenant que pour l'injectivité de  $\mathcal{N}$ , on se ramène au cas où  $\tau_0$  est une représentation d'un groupe compact. En effet, supposons que  $\tau_0$  soit sous-module d'une série principale  $(\prod_j \gamma_j) \times \tau'_0$  où les  $\gamma_j$  sont des caractères de  $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R})$  et  $\tau'_0$  est une représentation d'un groupe compact  $G'_0$  de même type que  $G$  ( $G'_0$  est

la partie compacte du facteur de Levi d'un parabolique minimal de  $G_0$ ). On a donc

$$(5-10) \quad \pi = \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \tau_0 \hookrightarrow \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \tau'_0.$$

Grâce à la proposition ci-dessus,

$$\left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \left( \prod_j \gamma_j \right) = \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right)$$

et l'on peut réécrire le terme de droite en permutant les facteurs. On obtient donc un plongement

$$(5-11) \quad \pi = \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \tau_0 \hookrightarrow \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \tau'_0 = \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \pi'.$$

Admettons le résultat pour  $\tau'_0$ , à savoir que l'opérateur d'entrelacement

$$\mathcal{N}' : \pi' = \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \tau'_0 \hookrightarrow \Delta'_{--} \times \Delta'_{\text{temp}} \times \tilde{\tau}'_{\text{temp}}$$

construit comme ci-dessus en partant de  $\pi'$  plutôt que de  $\pi$ , et avec les notations évidentes, est injectif. Remarquons que comme  $\tau'_0$  est une représentation irréductible d'un groupe compact, on a avec ces notations  $\tilde{\tau}' = \tilde{\tau}'_{\text{temp}} = \tau'_0$  et  $\tilde{\tau}'_{--}$  est triviale et en particulier  $\Delta'_{--} = \Delta_{--}^{\text{Speh}}$ . D'autre part  $\Delta'_{\text{temp}} = \Delta_{\text{temp}}^{\text{Speh}} = \Delta_{\text{temp}}$ . On a donc un opérateur injectif

$$\mathcal{N}' : \pi' = \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \tau'_0 \hookrightarrow \Delta_{--}^{\text{Speh}} \times \Delta_{\text{temp}}^{\text{Speh}} \times \tau'_0.$$

Par exactitude du foncteur d'induction parabolique, on en déduit un opérateur injectif,

$$\mathcal{N}' : \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \pi' \hookrightarrow \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \Delta_{--}^{\text{Speh}} \times \Delta_{\text{temp}}^{\text{Speh}} \times \tau'_0.$$

On utilise à nouveau la [proposition 5.7](#) pour écrire le terme de droite sous la forme  $\Delta_{--}^{\text{Speh}} \times \Delta_{\text{temp}}^{\text{Speh}} \times \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \tau'_0$ , et on compose avec le plongement (5-11) pour obtenir un morphisme injectif que l'on note encore  $\mathcal{N}'$  :

$$\mathcal{N}' : \pi \hookrightarrow \Delta_{--}^{\text{Speh}} \times \Delta_{\text{temp}}^{\text{Speh}} \times \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \tau'_0.$$

L'injection  $\tau_0 \hookrightarrow \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \tau'_0$  est obtenue en composant l'injection  $\tau_0 \hookrightarrow \tilde{\tau}_{--} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}}$  et un morphisme  $\tilde{\tau}_{--} \times \tilde{\tau}_{\text{temp}} \rightarrow \left( \prod_j \gamma_j \right) \times \tau'_0$ . Ainsi l'on voit que  $\mathcal{N}'$  se factorise par  $\mathcal{N}$ . Ceci établit le fait que l'injectivité de  $\mathcal{N}'$  implique celle de  $\mathcal{N}$ .

Pour les groupes symplectiques, qui sont déployés,  $\tau'_0$  est la représentation triviale du groupe trivial. L'injectivité de  $\mathcal{N}'$  provient alors de l'irréductibilité de  $\pi'$  établie à la quatrième étape, et du fait que  $\mathcal{N}'$  est non nul.

Les groupes orthogonaux demandent encore un peu de travail pour conclure comme ci-dessus car  $G'_0$  peut être de rang trop petit pour pouvoir appliquer l'irréductibilité démontrée à la quatrième étape. On utilise les foncteurs de translation pour se ramener au cas où le caractère infinitésimal de  $\tau'_0$  est celui de la représentation triviale, c'est-à-dire que  $\tau'_0$  est la représentation triviale  $\mathbf{Triv}_{G'_0}$  de  $G'_0$ .

Soit  $\sigma$  un facteur irréductible de  $\pi' = \left(\prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i)\right) \times \mathbf{Triv}_{G'_0}$  (rappelons que  $\pi'$  est unitaire et donc semi-simple). Notons  $n_0$  le plus grand entier entrant dans le caractère infinitésimal de  $\mathbf{Triv}_{G'_0}$ . Soit  $T$  un entier suffisamment grand. Notons  $G''_0$  le groupe de même type que  $G'_0$  et de rang  $T + \text{rg}(G'_0)$  tel que  $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R})^T \times G''_0$  soit un sous-groupe de Levi de  $G'_0$ , et soit  $\mathbf{Triv}_{G''_0}$  la représentation triviale de ce groupe. On suppose donc  $T$  assez grand pour que les hypothèses de la quatrième étape soient vérifiées pour  $\pi'' = \left(\prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i)\right) \times \mathbf{Triv}_{G''_0}$  qui est donc irréductible. La représentation induite

$$(5-12) \quad |\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \sigma$$

possède un seul quotient irréductible car elle est quotient de la représentation

$$|\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times S(\sigma)$$

où  $S(\sigma)$  est une représentation standard en position de Langlands positive et dont  $\sigma$  est le quotient de Langlands. Grâce à la [proposition 5.7](#), on peut mettre (5-12) en position de Langlands positive, et elle admet donc un unique quotient irréductible. Ce quotient irréductible est isomorphe à l'image de l'opérateur d'entrelacement standard

$$|\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \sigma \rightarrow |\cdot|^{-n_0-T} \times |\cdot|^{-n_0-T+1} \times \cdots \times |\cdot|^{-n_0-1} \times \sigma$$

Donc les quotients irréductibles de

$$(5-13) \quad |\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \pi'$$

sont isomorphes aux sous-modules irréductibles de l'image de l'opérateur d'entrelacement standard

$$(5-14) \quad \begin{aligned} |\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \pi' \\ \rightarrow |\cdot|^{-n_0-T} \times |\cdot|^{-n_0-T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{-n_0-1} \times \pi' \end{aligned}$$

et il y a bijection entre ces sous-modules irréductibles de l'image (et cette image est semi-simple) et les sous-modules irréductibles de  $\pi'$ .

L'opérateur d'entrelacement (5-14) se réécrit en utilisant la [proposition 5.7](#) ci-dessus

$$(5-15) \quad \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times |\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \mathbf{Triv}_{G'_0} \\ \rightarrow \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times |\cdot|^{-n_0-T} \times |\cdot|^{-n_0-T+1} \times \cdots \times |\cdot|^{-n_0-1} \times \mathbf{Triv}_{G'_0}$$

Or  $|\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \mathbf{Triv}_{G'_0}$ , (resp.  $|\cdot|^{-n_0-T} \times |\cdot|^{-n_0-T+1} \times \cdots \times |\cdot|^{-n_0-1} \times \mathbf{Triv}_{G'_0}$ ) est la représentation standard en position de Langlands positive (resp. négative) dont  $\mathbf{Triv}_{G'_0}$  est l'unique quotient irréductible (resp. sous-module). Ainsi  $\pi'' = \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \mathbf{Triv}_{G'_0}$  apparaît comme image de (5-15), et cette image est irréductible. Mais (5-15) s'écrit comme la composition de l'isomorphisme

$$\left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times |\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \mathbf{Triv}_{G'_0} \\ \simeq |\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \mathbf{Triv}_{G'_0} \\ = |\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{n_0+T-1} \times \cdots \times |\cdot|^{n_0+1} \times \pi',$$

de (5-14), et de l'isomorphisme

$$|\cdot|^{n_0+T} \times |\cdot|^{-n_0-T+1} \times \cdots \times |\cdot|^{-n_0-1} \times \pi' \\ = |\cdot|^{-n_0-T} \times |\cdot|^{-n_0-T+1} \times \cdots \times |\cdot|^{-n_0-1} \times \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times \mathbf{Triv}_{G'_0} \\ \simeq \left( \prod_i \mathbf{Speh}(\delta_{t_i, s_i}, a_i) \right) \times |\cdot|^{-n_0-T} \times |\cdot|^{-n_0-T+1} \times \cdots \times |\cdot|^{-n_0-1} \times \mathbf{Triv}_{G'_0}$$

Ainsi l'image de (5-15) est d'une part irréductible et d'autre part a autant de composantes irréductibles que  $\pi'$  d'après la remarque faite après (5-14). Ceci montre que  $\pi'$  est irréductible.

Ceci termine la démonstration de la [proposition 5.5](#). □

## Remerciements

Nous remercions P. Trapa qui nous a indiqué que l'on pouvait déduire le résultat de multiplicité un du [théorème 1.1](#) d'une lecture attentive des résultats de la littérature sur les propriétés des foncteurs de translation. Le deuxième auteur a bénéficié d'une aide de l'agence nationale de la recherche ANR-13-BS01-0012 FERPLAY.

## Bibliographie

- [Adams et Johnson 1987] J. Adams et J. F. Johnson, “Endoscopic groups and packets of non-tempered representations”, *Compositio Math.* **64**:3 (1987), 271–309. [MR](#) [Zbl](#)
- [Adams et al. 1992] J. Adams, D. Barbasch et D. A. Vogan, Jr., *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progr. Math. **104**, Birkhäuser, Boston, 1992. [MR](#) [Zbl](#)
- [Arancibia et al. 2018] N. Arancibia, C. Mœglin et D. Renard, “Paquets d’Arthur des groupes classiques et unitaires”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sér. 6* **27**:5 (2018), 1023–1105.
- [Arthur 1984] J. Arthur, “On some problems suggested by the trace formula”, pp. 1–49 dans *Lie group representations, II* (College Park, MD, 1982/1983), édité par R. Herb et al., Lecture Notes in Math. **1041**, Springer, 1984. [MR](#) [Zbl](#)
- [Arthur 1989] J. Arthur, “Unipotent automorphic representations: conjectures”, pp. 13–71 dans *Orbites unipotentes et représentations, II*, Astérisque **171-172**, Soc. Math. France, Paris, 1989. [MR](#) [Zbl](#)
- [Arthur 2013] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **61**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013. [MR](#) [Zbl](#)
- [Barbasch 1989] D. Barbasch, “The unitary dual for complex classical Lie groups”, *Invent. Math.* **96**:1 (1989), 103–176. [MR](#) [Zbl](#)
- [Barbasch et Vogan 1983] D. Barbasch et D. Vogan, “Weyl group representations and nilpotent orbits”, pp. 21–33 dans *Representation theory of reductive groups* (Park City, UT, 1982), édité par P. C. Trombi, Progr. Math. **40**, Birkhäuser, Boston, 1983. [MR](#) [Zbl](#)
- [Johnson 1984] J. F. Johnson, “Lie algebra cohomology and the resolution of certain Harish-Chandra modules”, *Math. Ann.* **267**:3 (1984), 377–393. [MR](#) [Zbl](#)
- [Kaletha et al. 2014] T. Kaletha, A. Minguez, S. W. Shin et P.-J. White, “Endoscopic classification of representations : inner forms of unitary groups”, preprint, 2014. [arXiv](#)
- [Knapp et Vogan 1995] A. W. Knap et D. A. Vogan, Jr., *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Math. Series **45**, Princeton Univ. Press, 1995. [MR](#) [Zbl](#)
- [Kraft et Procesi 1979] H. Kraft et C. Procesi, “Closures of conjugacy classes of matrices are normal”, *Invent. Math.* **53**:3 (1979), 227–247. [MR](#) [Zbl](#)
- [Matumoto 1996] H. Matumoto, “On the representations of  $U(m, n)$  unitarily induced from derived functor modules”, *Compositio Math.* **100**:1 (1996), 1–39. [MR](#) [Zbl](#)
- [Matumoto 2004] H. Matumoto, “On the representations of  $Sp(p, q)$  and  $SO^*(2n)$  unitarily induced from derived functor modules”, *Compositio Math.* **140**:4 (2004), 1059–1096. [MR](#) [Zbl](#)
- [Mœglin 2017] C. Mœglin, “Paquets d’Arthur spéciaux unipotents aux places archimédiennes et correspondance de Howe”, pp. 469–502 dans *Representation theory, number theory, and invariant theory* (New Haven, CT, 2015), édité par J. Cogdell et al., Progr. Math. **323**, Birkhäuser, Cham, 2017. [MR](#)
- [Mœglin et Renard 2017] C. Mœglin et D. Renard, “Sur les paquets d’Arthur des groupes classiques réels”, 2017. To appear in *J. Eur. Math. Soc.* [arXiv](#)
- [Mœglin et Renard 2018a] C. Mœglin et D. Renard, “Sur les paquets d’Arthur aux places réelles, translation”, pp. 299–320 dans *Geometric aspects of the trace formula*, édité par W. Müller et al., Springer, 2018.

- [Mœglin et Renard 2018b] C. Mœglin et D. Renard, “[Sur les paquets d’Arthur des groupes classiques et unitaires non quasi-déployés](#)”, pp. 341–361 dans *Relative aspects in representation theory, Langlands functoriality and automorphic forms*, édité par V. Heiermann et D. Prasad, Lecture Notes in Math. **2221**, Springer, 2018.
- [Mok 2015] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **1108**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015. [MR](#) [Zbl](#)
- [Renard 2010] D. Renard, *Représentations des groupes réductifs  $p$ -adiques*, Cours Spécialisés **17**, Soc. Math. France, Paris, 2010. [MR](#) [Zbl](#)
- [Shelstad 2015] D. Shelstad, “[On elliptic factors in real endoscopic transfer, I](#)”, pp. 455–504 dans *Representations of reductive groups*, édité par M. Nevins et P. Trapa, Progr. Math. **312**, Birkhäuser, Cham, 2015. [MR](#) [Zbl](#)
- [Speh 1981] B. Speh, “[The unitary dual of  \$Gl\(3, \mathbb{R}\)\$  and  \$Gl\(4, \mathbb{R}\)\$](#) ”, *Math. Ann.* **258**:2 (1981), 113–133. [MR](#) [Zbl](#)
- [Trapa 2001] P. E. Trapa, “[Annihilators and associated varieties of  \$A\_q\(\lambda\)\$  modules for  \$U\(p, q\)\$](#) ”, *Compositio Math.* **129**:1 (2001), 1–45. [MR](#) [Zbl](#)
- [Vogan 1981] D. A. Vogan, Jr., *Representations of real reductive Lie groups*, Progr. Math. **15**, Birkhäuser, Boston, 1981. [MR](#) [Zbl](#)
- [Vogan 1988] D. A. Vogan, Jr., “[Irreducibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces](#)”, pp. 191–221 dans *Representations of Lie groups* (Kyoto/Hiroshima, 1986), édité par K. Okamoto et T. Ōshima, Adv. Stud. Pure Math. **14**, Academic Press, Boston, 1988. [MR](#) [Zbl](#)

Received May 14, 2018.

COLETTE MÆGLIN  
CNRS  
INSTITUT MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU  
PARIS  
FRANCE  
[colette.moeglin@imj-prg.fr](mailto:colette.moeglin@imj-prg.fr)

DAVID RENARD  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES LAURENT SCHWARTZ  
ECOLE POLYTECHNIQUE  
PALAISEAU  
FRANCE  
[david.renard@polytechnique.edu](mailto:david.renard@polytechnique.edu)

# PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Founded in 1951 by E. F. Beckenbach (1906–1982) and F. Wolf (1904–1989)

[msp.org/pjm](http://msp.org/pjm)

## EDITORS

Don Blasius (Managing Editor)  
Department of Mathematics  
University of California  
Los Angeles, CA 90095-1555  
[blasius@math.ucla.edu](mailto:blasius@math.ucla.edu)

Paul Balmer  
Department of Mathematics  
University of California  
Los Angeles, CA 90095-1555  
[balmer@math.ucla.edu](mailto:balmer@math.ucla.edu)

Vyjayanthi Chari  
Department of Mathematics  
University of California  
Riverside, CA 92521-0135  
[chari@math.ucr.edu](mailto:chari@math.ucr.edu)

Matthias Aschenbrenner  
Department of Mathematics  
University of California  
Los Angeles, CA 90095-1555  
[matthias@math.ucla.edu](mailto:matthias@math.ucla.edu)

Daryl Cooper  
Department of Mathematics  
University of California  
Santa Barbara, CA 93106-3080  
[cooper@math.ucsb.edu](mailto:cooper@math.ucsb.edu)

Wee Teck Gan  
Mathematics Department  
National University of Singapore  
Singapore 119076  
[matgwt@nus.edu.sg](mailto:matgwt@nus.edu.sg)

Kefeng Liu  
Department of Mathematics  
University of California  
Los Angeles, CA 90095-1555  
[liu@math.ucla.edu](mailto:liu@math.ucla.edu)

Jiang-Hua Lu  
Department of Mathematics  
The University of Hong Kong  
Pokfulam Rd., Hong Kong  
[jhlu@maths.hku.hk](mailto:jhlu@maths.hku.hk)

Sorin Popa  
Department of Mathematics  
University of California  
Los Angeles, CA 90095-1555  
[popa@math.ucla.edu](mailto:popa@math.ucla.edu)

Jie Qing  
Department of Mathematics  
University of California  
Santa Cruz, CA 95064  
[qing@cats.ucsc.edu](mailto:qing@cats.ucsc.edu)

Paul Yang  
Department of Mathematics  
Princeton University  
Princeton NJ 08544-1000  
[yang@math.princeton.edu](mailto:yang@math.princeton.edu)

## PRODUCTION

Silvio Levy, Scientific Editor, [production@msp.org](mailto:production@msp.org)

## SUPPORTING INSTITUTIONS

ACADEMIA SINICA, TAIPEI  
CALIFORNIA INST. OF TECHNOLOGY  
INST. DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA  
KEIO UNIVERSITY  
MATH. SCIENCES RESEARCH INSTITUTE  
NEW MEXICO STATE UNIV.  
OREGON STATE UNIV.

STANFORD UNIVERSITY  
UNIV. OF BRITISH COLUMBIA  
UNIV. OF CALIFORNIA, BERKELEY  
UNIV. OF CALIFORNIA, DAVIS  
UNIV. OF CALIFORNIA, LOS ANGELES  
UNIV. OF CALIFORNIA, RIVERSIDE  
UNIV. OF CALIFORNIA, SAN DIEGO  
UNIV. OF CALIF., SANTA BARBARA

UNIV. OF CALIF., SANTA CRUZ  
UNIV. OF MONTANA  
UNIV. OF OREGON  
UNIV. OF SOUTHERN CALIFORNIA  
UNIV. OF UTAH  
UNIV. OF WASHINGTON  
WASHINGTON STATE UNIVERSITY

These supporting institutions contribute to the cost of publication of this Journal, but they are not owners or publishers and have no responsibility for its contents or policies.

---

See inside back cover or [msp.org/pjm](http://msp.org/pjm) for submission instructions.

---

The subscription price for 2019 is US \$490/year for the electronic version, and \$665/year for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 4163, Berkeley, CA 94704-0163, U.S.A. The Pacific Journal of Mathematics is indexed by [Mathematical Reviews](#), [Zentralblatt MATH](#), [PASCAL CNRS Index](#), [Referativnyi Zhurnal](#), [Current Mathematical Publications](#) and [Web of Knowledge \(Science Citation Index\)](#).

---

The Pacific Journal of Mathematics (ISSN 1945-5844 electronic, 0030-8730 printed) at the University of California, c/o Department of Mathematics, 798 Evans Hall #3840, Berkeley, CA 94720-3840, is published twelve times a year. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices. POSTMASTER: send address changes to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 4163, Berkeley, CA 94704-0163.

---

PJM peer review and production are managed by EditFLOW<sup>®</sup> from Mathematical Sciences Publishers.

PUBLISHED BY

 **mathematical sciences publishers**  
nonprofit scientific publishing

<http://msp.org/>

© 2019 Mathematical Sciences Publishers

# PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 299    No. 1    March 2019

---

Calabi–Yau 4-folds of Borcea–Voisin type from F-theory	1
ANDREA CATTANEO, ALICE GARBAGNATI and MATTEO PENEGINI	
Partial regularity of harmonic maps from a Riemannian manifold into a Lorentzian manifold	33
JIAYU LI and LEI LIU	
Sur les paquets d’Arthur des groupes unitaires et quelques conséquences pour les groupes classiques	53
COLETTE MÆGLIN and DAVID RENARD	
Topology and dynamics of the contracting boundary of cocompact CAT(0) spaces	89
DEVIN MURRAY	
KMS conditions, standard real subspaces and reflection positivity on the circle group	117
KARL-HERMANN NEEB and GESTUR ÓLAFSSON	
Improved Buckley’s theorem on locally compact abelian groups	171
VICTORIA PATERNOSTRO and EZEQUIEL RELA	
Eternal forced mean curvature flows II: Existence	191
GRAHAM SMITH	
Symmetry and nonexistence of solutions for a fully nonlinear nonlocal system	237
BIRAN ZHANG and ZHONGXUE LÜ	