Tunisian Journal of Mathematics

an international publication organized by the Tunisian Mathematical Society

Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des hypersurfaces de Fano

Jean-Louis Colliot-Thélène

2019 vol. 1 no. 1

msp

TUNISIAN JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 1, No. 1, 2019
dx.doi.org/10.2140/tunis.2019.1.47

Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des hypersurfaces de Fano

Jean-Louis Colliot-Thélène

Sur un corps algébriquement clos et sur un corps fini, on établit de nouveaux résultats d'annulation pour la cohomologie non ramifiée de degré 3 des hypersurfaces de Fano.

We establish the vanishing of degree three unramified cohomology for several new types of Fano hypersurfaces when the ground field is either finite or algebraically closed of arbitrary characteristic.

Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k et $\ell \neq \mathrm{car}(k)$ un nombre premier. Pour tout couple d'entiers $i \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}$, le groupe de cohomologie non ramifiée $H^i_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ est par définition le groupe des sections globales du faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau qui à un ouvert $U \subset X$ associe le groupe de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(U, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ de U à valeurs dans le groupe des racines ℓ-primaires de l'unité tordues j fois. Les propriétés générales de ces groupes sont décrites dans le rapport [Colliot-Thélène 1995]. Le groupe $H^2_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))$ est la composante ℓ-primaire du groupe de Brauer de X. Les groupes $H^i_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ sont des invariants k-birationnels des variétés projectives et lisses. On a une application naturelle du groupe de cohomologie galoisienne $H^i(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j)) = H^i_{\text{ét}}(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ dans le groupe $H^i_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$, application qui est un isomorphisme si X est k-birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}^m_k$.

On s'intéresse ici au groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Ce groupe joue un rôle important dans l'étude [Colliot-Thélène et Voisin 2012; Kahn 2012; Colliot-Thélène et Kahn 2013; Colliot-Thélène 2015] de l'application "cycle" sur le groupe de Chow des cycles de codimension 2

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Pour une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sur le corps des complexes, $n = 4$ et $n = 5$, on sait que l'on a $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ pour tout ℓ. C'est une conséquence [Colliot-Thélène et Voisin 2012, théorème 1.1] de la conjecture de Hodge entière

MSC2010 : 14F20, 14J45.

Mots-clefs : Fano hypersurfaces, unramified cohomology.

pour les cycles de codimension 2 sur ces hypersurfaces cubiques. Pour $n = 4$, cette conjecture est facile à établir (voir le théorème 2.1 ci-dessous). C'est aussi un cas très particulier d'un théorème général de Claire Voisin sur les solides uniréglés. Pour $n = 5$, cette conjecture fut démontrée dans [Voisin 2007, Theorem 18].

Dans [Colliot-Thélène 2015, §5.3], j'ai discuté des extensions de ce résultat aux hypersurfaces lisses de degré $d \leq n$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ avec n quelconque. Par la formule d'adjonction, ce sont exactement les hypersurfaces lisses de Fano, c'est-à-dire à fibré anticanonique ample.

Dans cet article, on considère la situation sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, et sur un corps fini.

Plus précisément, pour $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une hypersurface lisse de degré $d \leq n$ sur un corps k de caractéristique différente de ℓ, on établit

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$$

dans chacun des cas suivants :

(i) k algébriquement clos et $n \neq 5$ (théorème 2.1) ;

(ii) $k = \mathbb{F}$ fini et $n \neq 4, 5$ (théorème 3.1) ;

(iii) k algébriquement clos (de caractéristique différente de 2 et 3), $d = 3$ et $n = 5$ (théorème 4.1) ;

(iv) $k = \mathbb{F}$ fini, $d = 3$ et $n = 4$ (théorème 5.1).

Le cas des hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{F}}$ reste ouvert.

La démonstration du cas (iii) repose sur un théorème de Charles et Pirutka [2015]. Dans le cas (iv), on offre deux démonstrations, utilisant toutes deux la théorie du corps de classes supérieur de K. Kato et S. Saito. L'une de ces démonstrations passe par un théorème de Parimala et Suresh [2016].

Pour X une variété sur un corps k et $\bar{k}$ une clôture séparable de k, on note $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$.

1. Quelques rappels

Lemme 1.1. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$, $n \geq 4$, une hypersurface cubique lisse. Le pgcd des degrés des extensions finies L de $\mathbb{F}$ sur lesquelles X_L possède une L-droite est égal à* 1.

Démonstration. D'après Fano, Altman et Kleiman [1977], sur tout corps k, la variété de Fano $F = F(X)$ des droites de $X \subset \mathbb{P}^n_k$, est non vide, projective et lisse [Altman et Kleiman 1977, Corollary 1.12] pour $n \geq 3$ et géométriquement connexe pour $n \geq 4$ [Altman et Kleiman 1977, Theorem 1.16(i)]. Sur un corps fini $\mathbb{F}$, les estimations de Lang–Weil donnent le résultat. □

Remarque 1.2. Des résultats précis sur l'existence de droites sur le corps fini $\mathbb{F}$ lui-même sont obtenus dans [Debarre et al. 2017].

Proposition 1.3. *Soit X une surface projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. Si k est algébriquement clos, ou si k est fini, $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.*

Démonstration. On a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \subset H^3(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Ce dernier groupe est nul si k est algébriquement clos, car la ℓ-dimension cohomologique du corps des fonctions $k(X)$ est 2.

Pour toute surface X projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini et ℓ premier différent de la caractéristique de k, on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ (Sansuc, Soulé et l'auteur [Colliot-Thélène et al. 1983, remarque 2, p. 790] ; Kato [1986, Theorem 0.7 and Corollary]). □

Proposition 1.4. *Soit $n \geq 3$ un entier et soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une hypersurface cubique lisse sur un corps k. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k.*

(i) *Si X possède un zéro-cycle de degré 1, le quotient du groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par l'image de $H^3(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par 6.*

(ii) *Si X contient une droite k-rationnelle, le quotient du groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par l'image de $H^3(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par 2.*

(iii) *Si k est algébriquement clos, $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par 2.*

(iv) *Si k est fini, $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par 2.*

Démonstration. Les énoncés [Auel et al. 2017, Theorem 1.4, Proposition 2.1] donnent que ce quotient est annulé par 6 si X possède un zéro-cycle de degré 1, et par 2 si X contient une droite k-rationnelle. Ceci établit (i), (ii) et (iii). Pour k un corps fini, X possède un zéro-cycle de degré 1, et même un point rationnel. L'énoncé (iv) pour $n = 3$ est un cas particulier de la proposition 1.3. Pour $n \geq 4$, l'énoncé (iv) résulte de la combinaison de l'énoncé (ii), du lemme 1.1 et d'un argument de corestriction-restriction. □

2. Hypersurfaces de Fano dans $\mathbb{P}^n_k$, k algébriquement clos, $n \neq 5$

On étend en toute caractéristique des résultats de [Colliot-Thélène 2015]. On en profite pour rectifier la démonstration de [Colliot-Thélène 2015, théorème 5.6(vi)] pour une hypersurface dans $\mathbb{P}^4$.

Théorème 2.1. *Soit $n \geq 3$ un entier, et soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une hypersurface lisse de degré d sur un corps algébriquement clos k. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k.*

(i) *Pour $n = 3$ et $n \geq 6$, l'application cycle*

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

(ii) *Pour $n = 4$ et $d \leq 4$, l'application cycle*

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

(iii) *Pour $n \neq 5$ et $d \leq n$, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.*

Démonstration. Établissons (i). Pour $n = 3$, la classe de tout k-point de X engendre le $\mathbb{Z}_\ell$-module $H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \simeq \mathbb{Z}_\ell$. L'énoncé (i) est donc clair pour $n = 3$.

Supposons $n \geq 4$. Soit $U = \mathbb{P}^n_k \setminus X$. Pour tout entier $m > 0$, on a la suite exacte de cohomologie étale à supports propres [Milne 1980, III.1.30] :

$$H^4_c(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^4(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^5_c(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2)).$$

Les groupes finis $H^i_c(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2))$ et $H^{2n-i}(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2n-2))$ sont duaux (dualité de Poincaré [Milne 1980, VI.11.2]).

Pour $n \geq 6$, on a $2n - 4 > 2n - 5 > n$. Le théorème de Lefschetz affine [Milne 1980, VI.7.2] donne $H^{2n-4}(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2n-2)) = 0$ et $H^{2n-5}(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2n-2)) = 0$.

La flèche de restriction $H^4(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2))$ est donc un isomorphisme de groupes finis pour tout m. La flèche de restriction

$$\mathbb{Z}_\ell = H^4(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est donc un isomorphisme. Ceci implique que l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective. Ceci établit (i) pour $n \geq 6$.

Pour $n > 4$, la considération de la suite exacte

$$H^3(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^3(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \to H^4_c(U, \mathbb{Z}/\ell^m(2)),$$

la dualité de Poincaré et le théorème de Lefschetz affine donnent alors

$$H^3(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) = 0$$

pour tout m et donc $H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. Ceci sera utilisé dans la démonstration du théorème 3.1 ci-après.

Établissons l'énoncé (ii). Soit donc $n = 4$. L'argument qui suit corrige celui donné dans [Colliot-Thélène 2015, théorème 5.6(vi)].

Pour tout degré d, et tout entier $m > 0$, la flèche de restriction $H^2(\mathbb{P}^4, \mathbb{Z}/\ell^m) \to H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^m)$ est un isomorphisme, comme on voit en utilisant la suite exacte de cohomologie étale à supports, la dualité de Poincaré sur $U = \mathbb{P}^4 \setminus X$, et le théorème de Lefschetz affine. Ceci implique $H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^m) \simeq \mathbb{Z}/\ell^m$, et ceci implique que l'application cycle $\mathrm{CH}^1(X)/\ell^m \to H^2(X, \mu_{\ell^m})$ définie via l'application de Kummer $\mathrm{Pic}(X)/\ell^m \to H^2(X, \mu_{\ell^m})$ est un isomorphisme.

Le cup-produit sur la cohomologie étale

$$H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \times H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^m(1)) \to H^6(X, \mathbb{Z}/\ell^m(3)) = \mathbb{Z}/\ell^m$$

est un accouplement non dégénéré de groupes finis (dualité de Poincaré). D'après ce qui précède, chacun des deux termes de cet accouplement est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell^m$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CH}^2(X)/\ell^m & \times & \mathrm{CH}^1(X)/\ell^m & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell^m \\ \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow = \\ H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) & \times & H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^m(1)) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell^m \end{array}$$

où l'accouplement supérieur est donné par l'intersection des cycles.

Pour $\ell \neq 2 = (\dim(X) - 1)!$, ce diagramme est commutatif [Milne 1980, Proposition VI.10.7], Pour tout premier ℓ, il commute sur les couples de cycles (Z_1, Z_2) transverses l'un à l'autre [Milne 1980, Proposition VI.9.5]. Soit $Y = H \cap X \subset X$ la trace d'un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^4$. Sous l'hypothèse $d \leq 4$, l'hypersurface X contient une droite $L \subset \mathbb{P}^4$. Ceci est bien connu pour $d = 3$; pour un énoncé général, voir [Debarre 2017, Theorem 2.1]. Dans l'accouplement supérieur, on a $(L, Y) = 1$. En appliquant [Milne 1980, Proposition VI.9.5], on voit que la classe de cycle de L dans $H^4(X, \mathbb{Z}/\ell^m(2)) \simeq \mathbb{Z}/\ell^m$ engendre ce groupe. Ainsi l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective. Ceci établit (ii) pour $n = 4$.

Montrons maintenant (iii). D'après [Kahn 2012, théorème 1.1] ou [Colliot-Thélène et Kahn 2013, théorème 2.2], la surjectivité de

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = \mathbb{Z}_\ell$$

implique que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible.

D'après un théorème de Roitman [1980] (voir aussi [Chatzistamatiou et Levine 2017, §4]), l'hypothèse $d \leq n$ implique que sur tout corps algébriquement clos K contenant k, l'application degré $\mathrm{CH}_0(X_K) \to \mathbb{Z}$ sur le groupe de Chow des zéro-cycles est un isomorphisme. D'après un argument général (voir [Colliot-Thélène et Kahn 2013, proposition 3.2]), ceci implique l'existence d'un entier $N > 0$ qui annule $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$.

Sous l'hypothèse $n \neq 5$ et $d \leq n$, on a donc établi que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible et d'exposant fini. Il est donc nul. □

Remarque 2.2. Pour $k = \mathbb{C}$ et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ comme ci-dessus avec $d \leq n$ et tout corps F contenant k, et pour $n \geq 6$, on a établi dans [Colliot-Thélène 2015, théorème 5.6(vii)] que la flèche naturelle

$$H^3(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(X_F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un isomorphisme. Il est très vraisemblable que ce résultat vaut sur tout corps k algébriquement clos, avec ℓ distinct de la caractéristique de k.

3. Hypersurfaces de Fano dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$, $\mathbb{F}$ fini, $n = 3$ et $n \geq 6$

Théorème 3.1. *Soit $n \geq 3$ un entier et soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ une hypersurface lisse de degré $d \leq n$ sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Pour $n = 3$ et pour $n \geq 6$, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition 1.3, on peut supposer $n \geq 6$.

Pour $n \geq 6$, on a établi dans la démonstration du théorème 2.1 que l'on a $H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ et que la restriction

$$\mathbb{Z}_\ell = H^4(\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{F}}}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un isomorphisme. Pour toute $\mathbb{F}$-variété Y, on dispose de la suite exacte déduite de la suite spectrale de Leray

$$0 \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\bar{Y}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^4(Y, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^0(\mathbb{F}, H^4(\bar{Y}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to 0.$$

La comparaison de cette suite pour $Y = \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ et pour $Y = X$ donne que l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = \mathbb{Z}_\ell$$

est surjective.

D'après [Kahn 2012, théorème 1.1] ou [Colliot-Thélène et Kahn 2013, théorème 2.2], sur un corps fini $\mathbb{F}$, la surjectivité de

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = \mathbb{Z}_\ell$$

implique que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible.

Comme rappelé dans la démonstration du théorème 2.1, l'hypothèse $d \leq n$, le théorème de Roitman [1980] et l'argument donné dans [Colliot-Thélène et Kahn 2013, proposition 3.2] impliquent que $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est d'exposant fini.

Le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible et d'exposant fini, il est donc nul. □

4. Hypersurfaces cubiques dans $\mathbb{P}^5_k$, k algébriquement clos

Déjà pour les hypersurfaces cubiques, le théorème 2.1, sur un corps algébriquement clos, laisse ouvert le cas $n = 5$. Pour $X \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ une hypersurface cubique lisse sur le corps des complexes, Voisin [2007, Theorem 18] a établi la conjecture de Hodge entière dans ce contexte. D'après [Colliot-Thélène et Voisin 2012], ceci implique $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, et [Colliot-Thélène 1995, Theorem 4.4.1] montre alors que le résultat vaut pour toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^5_k$ sur un corps k algébriquement clos de caractéristique zéro.

En utilisant [Charles et Pirutka 2015], on obtient l'analogue de ce résultat sur tout corps algébriquement clos, avec une restriction mineure sur la caractéristique.

Théorème 4.1. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et 3. Soit $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une hypersurface cubique lisse. Soit ℓ premier différent de la caractéristique de k. On a $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition 1.4, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est d'exposant fini, en fait divisant 2. La proposition 1.4 donne donc déjà le résultat pour $\ell \neq 2$.

Par une variante du lemme de rigidité de Suslin [Colliot-Thélène 1995, Theorem 4.4.1], pour établir ce dernier énoncé $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, on peut se limiter à considérer le cas où k est une clôture algébrique d'un corps F de type fini sur le corps premier, et où $X = X_0 \times_F k$ pour $X_0 \subset \mathbb{P}^5_F$ une hypersurface cubique lisse.

On considère l'application cycle $\mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$. Elle respecte l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k/F)$. Elle envoie donc le groupe des cycles dans le sous-groupe

$$H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^f \subset H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

des classes dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert.

Comme $H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini et l'action de $\mathrm{Gal}(k/F)$ est continue, le conoyau de

$$H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^f \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un groupe sans torsion [Colliot-Thélène et Kahn 2013, lemme 4.1].

Charles et Pirutka [2015, théorème 1.1] ont montré que l'application

$$\mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^f$$

est surjective. On conclut que le conoyau de

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un groupe sans torsion. D'après [Kahn 2012, théorème 1.1] ou [Colliot-Thélène et Kahn 2013, théorème 2.2], le groupe fini donné par la torsion du conoyau de l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

coïncide avec le groupe quotient de $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal. D'après la proposition 1.4, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est d'exposant fini. Ceci établit $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. □

Remarque 4.2. Pour $X \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ une hypersurface cubique lisse, la conjecture de Hodge rationnelle (à coefficients dans $\mathbb{Q}$) pour les cycles de codimension deux est connue depuis 1977 [Zucker 1977 ; Murre 1977]. La nullité de $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ établie ci-dessus et [Colliot-Thélène et Voisin 2012, théorème 1.1] redonnent donc la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension deux sur ces hypersurfaces, c'est-à-dire le résultat établi en 2007 par Voisin [2007, Theorem 18 ; 2013, Theorem 3.11]. Il convient cependant d'observer que la démonstration ci-dessus repose de façon essentielle sur [Charles et Pirutka 2015], dont les méthodes géométriques sont inspirées de celles de [Voisin 2007] (qui cite [Zucker 1977]).

5. Hypersurfaces cubiques dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{F}}$, $\mathbb{F}$ corps fini

Pour les hypersurfaces cubiques lisses sur un corps fini, [Parimala et Suresh 2016] permet de compléter le théorème 3.1 pour $n = 4$.

Théorème 5.1. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{F}}$ une hypersurface cubique lisse sur un corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique différente de 2.*

(i) *Pour tout ℓ premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$, on a*

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0.$$

(ii) *Soit $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. L'application naturelle*

$$\mathrm{CH}^2(X) \to \mathrm{CH}^2(\overline{X})^G$$

est un isomorphisme.

(iii) *L'application cycle*

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

Démonstration. (i) Le cas $\ell \neq 2$ résulte déjà de la proposition 1.4. Pour démontrer le théorème, par le lemme 1.1 et un argument de restriction-corestriction, on peut supposer que X contient une droite $L \subset X$ définie sur le corps $\mathbb{F}$. En éclatant X le long de L, on trouve une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse Y $\mathbb{F}$-birationnelle à X et munie d'une structure de fibration en coniques sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}}$. Le théorème de Parimala et Suresh [2016, Corollary 5.6] donne alors $H^3_{\mathrm{nr}}(Y, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, et donc $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.

(ii) On sait (théorème de Lefschetz faible) que $H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion. Alors la nullité de $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ et [Colliot-Thélène et Kahn 2013, corollaire 6.9] donnent (ii).

(iii) Comme X est géométriquement unirationnelle de dimension 3, le conoyau de l'application cycle $\mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est un groupe fini [Colliot-Thélène et Kahn 2013, proposition 3.23]. D'après [Kahn 2012, théorème 1.1] ou [Colliot-Thélène et Kahn 2013, théorème 2.2], la torsion du conoyau de l'application cycle s'identifie au quotient de $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal. De (i) résulte donc (iii). □

Remarque 5.2. La démonstration du théorème de Parimala et Suresh [2016] utilise un résultat de théorie du corps de classes supérieur, à savoir la nullité de $H^3_{\mathrm{nr}}(S, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ pour S une surface projective et lisse sur un corps fini [Colliot-Thélène et al. 1983, remarque 2, p. 790 ; Kato 1986, Theorem 0.7, Corollary]. Elle utilise aussi beaucoup d'autres arguments délicats.

En utilisant la théorie du corps de classes supérieur, et le lien entre la surface de Fano des droites de X et le groupe des cycles de codimension 2 de X, on peut donner une démonstration alternative du théorème 5.1. Soit $Y/\mathbb{F}$ la surface de Fano de X, qui paramétrise les droites de X. C'est une surface projective, lisse, géométriquement connexe [Altman et Kleiman 1977, Corollary 1.12], qui possède donc un zéro-cycle de degré 1 sur le corps fini $\mathbb{F}$.

La famille universelle des droites de X définit une correspondance entre Y et X qui induit un homomorphisme $\mathrm{CH}_0(Y) \to \mathrm{CH}^2(X)$, lequel induit une application $A_0(Y) \to \mathrm{CH}^2_0(X)$, où l'on a noté $A_0(Y) \subset \mathrm{CH}_0(Y)$ le sous-groupe des zéro-cycles de degré zéro, et $\mathrm{CH}^2_0(X) \subset \mathrm{CH}^2(X)$ le sous-groupe des 1-cycles d'intersection nulle avec une section hyperplane. Sur un corps de caractéristique différente de 2, on sait [Murre 1974, VI, VII] que l'application $A_0(\bar{Y}) \to \mathrm{CH}^2_0(\bar{X})$ se factorise comme

$$A_0(\bar{Y}) \to \mathrm{Alb}_Y(\bar{\mathbb{F}}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{CH}^2_0(\bar{X}).$$

D'après le théorème de Roitman, l'application d'Albanese $A_0(\bar{Y}) \to \mathrm{Alb}_Y(\bar{\mathbb{F}})$, qui est surjective, a son noyau uniquement divisible (en fait, pour $\mathbb{F}$ corps fini, cette flèche est un isomorphisme). Ceci assure que l'application $A_0(\bar{Y})^G \to \mathrm{CH}^2_0(\bar{X})^G$ est surjective. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_0(Y) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^2_0(X) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ A_0(\bar{Y})^G & \longrightarrow & \mathrm{CH}^2_0(\bar{X})^G \end{array}$$

La théorie du corps de classes supérieur [Kato et Saito 1983, Proposition 9.1] montre que, pour toute variété projective lisse Y géométriquement connexe sur un corps fini, l'application $A_0(Y) \to A_0(\bar{Y})^G$ est surjective (pour $Y/\mathbb{F}$ une surface, voir aussi [Colliot-Thélène et Kahn 2013, §6.2]). On conclut donc que $\mathrm{CH}^2_0(X) \to \mathrm{CH}^2_0(\bar{X})^G$ est surjectif, puis que $\mathrm{CH}^2(X) \to \mathrm{CH}^2(\bar{X})^G$ est surjectif. Ceci donne l'énoncé (ii) du théorème 5.1. Comme on a $H^3_{\mathrm{nr}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, l'énoncé (i) résulte alors de (ii) et de [Colliot-Thélène et Kahn 2013, corollaire 6.9]. L'application $\mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ a son conoyau fini. D'après [Kahn 2012] ou [Colliot-Thélène et Kahn 2013, théorème 2.2], ce conoyau s'identifie au quotient de $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal. Ainsi l'application $\mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjective.

Remarque 5.3. Sur un corps fini $\mathbb{F}$ et pour un nombre premier $\ell \neq \mathrm{car}(\mathbb{F})$, la question si l'on a $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ pour une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{F}}$ reste ouverte dans le cas crucial $\ell = 2$ (pour $\ell \neq 2$, voir la proposition 1.4(iv)). Elle est équivalente à la question de la surjectivité de l'application cycle

$$\mathrm{cyc}_X : \mathrm{CH}^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Bibliographie

[Altman et Kleiman 1977] A. B. Altman et S. L. Kleiman, "Foundations of the theory of Fano schemes", *Compositio Math.* **34**:1 (1977), 3–47. MR Zbl

[Auel et al. 2017] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, "Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane", pp. 29–55 dans *Brauer groups and obstruction problems*, édité par A. Auel et al., Progr. Math. **320**, Springer, 2017. MR Zbl

[Charles et Pirutka 2015] F. Charles et A. Pirutka, "La conjecture de Tate entière pour les cubiques de dimension quatre", *Compos. Math.* **151**:2 (2015), 253–264. MR Zbl

[Chatzistamatiou et Levine 2017] A. Chatzistamatiou et M. Levine, "Torsion orders of complete intersections", *Algebra & Number Theory* **11**:8 (2017), 1779–1835. MR

[Colliot-Thélène 1995] J.-L. Colliot-Thélène, "Birational invariants, purity and the Gersten conjecture", pp. 1–64 dans *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), édité par B. Jacob et A. Rosenberg, Proc. Sympos. Pure Math. **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. MR Zbl

[Colliot-Thélène 2015] J.-L. Colliot-Thélène, "Descente galoisienne sur le second groupe de Chow: mise au point et applications", *Doc. Math.* Extra vol. : Alexander S. Merkurjev's sixtieth birthday (2015), 195–220. MR Zbl

[Colliot-Thélène et Kahn 2013] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, "Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis", *J. K-Theory* **11**:1 (2013), 1–53. MR

[Colliot-Thélène et Voisin 2012] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, "Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière", *Duke Math. J.* **161**:5 (2012), 735–801. MR Zbl

[Colliot-Thélène et al. 1983] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, "Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux", *Duke Math. J.* **50**:3 (1983), 763–801. MR Zbl

[Debarre 2017] O. Debarre, "On the geometry of hypersurfaces of low degrees in the projective space", pp. 55–90 dans *Algebraic geometry and number theory* (Istanbul, 2014), édité par H. Mourtada et al., Progr. Math. **321**, Springer, 2017. MR Zbl

[Debarre et al. 2017] O. Debarre, A. Laface et X. Roulleau, "Lines on cubic hypersurfaces over finite fields", pp. 19–51 dans *Geometry over nonclosed fields*, édité par F. Bogomolov et al., Springer, 2017. MR

[Kahn 2012] B. Kahn, "Classes de cycles motiviques étales", *Algebra & Number Theory* **6**:7 (2012), 1369–1407. MR Zbl

[Kato 1986] K. Kato, "A Hasse principle for two-dimensional global fields", *J. reine angew. Math.* **366** (1986), 142–183. MR Zbl

[Kato et Saito 1983] K. Kato et S. Saito, "Unramified class field theory of arithmetical surfaces", *Ann. of Math.* (2) **118**:2 (1983), 241–275. MR Zbl

[Milne 1980] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press, 1980. MR Zbl

[Murre 1974] J. P. Murre, "Some results on cubic threefolds", pp. 140–160 dans *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, édité par H. Popp, Lecture Notes in Math. **412**, Springer, 1974. MR Zbl

[Murre 1977] J. P. Murre, "On the Hodge conjecture for unirational fourfolds", *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **80**=*Indag. Math.* **39**:3 (1977), 230–232. MR Zbl

[Parimala et Suresh 2016] R. Parimala et V. Suresh, "Degree 3 cohomology of function fields of surfaces", *Int. Math. Res. Not.* **2016**:14 (2016), 4341–4374. MR

[Roitman 1980] A. A. Roitman, "Rational equivalence of zero-dimensional cycles", *Mat. Zametki* **28**:1 (1980), 85–90, 169. In Russian ; translated in *Math. Notes* **28**:1 (1980), 507–510. MR Zbl

[Voisin 2007] C. Voisin, "Some aspects of the Hodge conjecture", *Jpn. J. Math.* **2**:2 (2007), 261–296. MR Zbl

[Voisin 2013] C. Voisin, "Abel–Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal", *J. Algebraic Geom.* **22**:1 (2013), 141–174. MR Zbl

[Zucker 1977] S. Zucker, "The Hodge conjecture for cubic fourfolds", *Compositio Math.* **34**:2 (1977), 199–209. MR Zbl

Received 3 Aug 2017. Revised 15 Oct 2017.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE:

jean-louis.colliot-thelene@math.u-psud.fr
CNRS, Université Paris Sud et Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cédex, France

Tunisian Journal of Mathematics

msp.org/tunis

The Tunisian Journal of Mathematics is an international publication organized by the Tunisian Mathematical Society (http://www.tms.rnu.tn) and published in electronic and print formats by MSP in Berkeley.

See inside back cover or msp.org/tunis for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $*TBA*/year for the electronic version, and $*TBA*/year (+$*TBA*, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Tunisian Journal of Mathematics (ISSN 2576-7666 electronic, 2576-7658 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

TJM peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Tunisian Journal of Mathematics

2019 vol. 1 no. 1