Algebra & Number Theory

Volume 14
2020
No. 8

Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée

Yang Cao

msp

ALGEBRA AND NUMBER THEORY 14:8 (2020)
https://doi.org/10.2140/ant.2020.14.2151

Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée

Yang Cao

Pour une variété quasi-projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps de nombres k, on montre que l'obstruction de descente itérée est équivalente à l'obstruction de descente. Ceci généralise un résultat de Skorobogatov, et ceci répond à une question ouverte de Poonen. Les outils principaux sont la notion de sous-groupe de Brauer invariant et la notion d'obstruction de Brauer–Manin étale invariante pour une k-variété munie d'une action d'un groupe linéaire connexe.

For a quasi-projective smooth geometrically integral variety over a number field k, we prove that the iterated descent obstruction is equivalent to the descent obstruction. This generalizes a result of Skorobogatov, and this answers an open question of Poonen. Our main tools are the notion of invariant Brauer subgroup and the notion of invariant étale Brauer–Manin obstruction for a k-variety equipped with an action of a connected linear algebraic group.

1. Introduction

Soit k un corps de nombres. Soit $\mathbf{A}_k$ l'anneau des adèles de k. Pour une k-variété lisse X, on note $X(\mathbf{A}_k)$ l'ensemble des points adéliques de X. On a le plongement diagonal

$$X(k) \subset X(\mathbf{A}_k).$$

C'est une question importante de caractériser l'adhérence des points rationnels dans les points adéliques (principe de Hasse, approximation faible, approximation forte). Manin [1971] a montré que cette adhérence est contenue dans un fermé déterminé par le groupe de Brauer de la variété X. Depuis lors, divers auteurs

---

MSC2010 : primary 11G35; secondary 14G05, 20G35.
Mots-clefs : Hasse principle, Brauer–Manin obstruction, algebraic group.

(Manin, Colliot-Thélène, Sansuc, Skorobogatov, Harari, Demarche) ont décrit d'autres fermés de $X(\boldsymbol{A}_k)$ contenant les points rationnels, et se sont attachés à comprendre les inclusions entre ces divers fermés. On a utilisé pour cela les torseurs sous des groupes linéaires (finis ou non) sur X, et on a utilisé des combinaisons de ces deux approches pour déterminer des fermés minimaux de $X(\boldsymbol{A}_k)$ contenant $X(k)$. Harari et Skorobogatov [2002, Definition 4.2] ont décrit une inclusion (cf. (1-2) pour la définition)

$$X(k) \subset X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{descent}}.$$

Ensuite Poonen [2017, §8.5.2] a itéré cette inclusion en (cf. (1-3) pour la définition)

$$X(k) \subset X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{descent, descent}} \subset X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{descent}},$$

et demandé [Poonen 2017, §8.5.4] si la deuxième inclusion raffine la première. Le théorème principal du présent article (théorème 1.1) permet de répondre à cette question de Poonen : $X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{descent, descent}} = X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{descent}}$ (théorème 1.2 ci-dessous). Ce théorème 1.2 apporte un point final à l'utilisation combinée du groupe de Brauer et de la descente sous des groupes linéaires dans la détermination de l'adhérence de $X(k)$ dans $X(\boldsymbol{A}_k)$.

Donnons maintenant des énoncés précis.

On note Ω_k l'ensemble des places du corps de nombres k. Pour chaque $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété de k en v et $\mathcal{O}_v \subset k_v$ l'anneau des entiers ($\mathcal{O}_v = k_v$ pour v archimédienne).

Pour B un sous-groupe de $\mathrm{Br}(X)$, on définit

$$X(\boldsymbol{A}_k)^B = \left\{ (x_v)_{v\in\Omega_k} \in X(\boldsymbol{A}_k) : \sum_{v\in\Omega_k} \mathrm{inv}_v(\xi(x_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ \forall \xi \in B \right\}.$$

Comme l'a remarqué Manin [1971], la théorie du corps de classes donne $X(k) \subseteq X(\boldsymbol{A}_k)^B$.

Soient F un k-groupe algébrique et $f : Y \to X$ un F-torseur. Pour tout 1-cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$, on note F_σ, respectivement $f_\sigma : Y_\sigma \to X$ le tordu du k-groupe F, respectivement du torseur f, par le 1-cocycle σ. Alors f_σ est un F_σ-torseur. La classe d'isomorphisme du k-groupe F_σ, respectivement du torseur f_σ, ne dépend que de la classe de σ dans $H^1(k, F)$. Par abus de notation, étant donnée une classe $[\sigma] \in H^1(k, F)$, on note $F_\sigma = F_{[\sigma]}$ et $f_\sigma = f_{[\sigma]}$.

Pour une k-variété lisse X, Skorobogatov [1999] et Poonen [2010, §3.3] définissent l'ensemble suivant :

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét,Br}} := \bigcap_{\substack{f:Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ fini}}} \ \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}(Y_\sigma)}), \tag{1-1}$$

où F parcourt les k-groupes finis. Ils obtiennent une inclusion $X(k) \subset X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}}$. Ceci définit une obstruction au principe de Hasse pour X, appelée *obstruction de Brauer–Manin étale*, étudiée dans le cas projectif par Skorobogatov, Harari et Demarche, puis dans le cas quasi-projectif [Cao et al. 2019a].

Le résultat principal de cet article est :

Théorème 1.1. *Soient G un k-groupe linéaire quelconque, Z une k-variété lisse et $p : X \to Z$ un G-torseur. Alors :*
$$Z(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k,G)} p_\sigma(X_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}).$$

Pour G fini et Z projective, ce théorème avait déjà été établi par Skorobogatov [2009, Theorem 1.1]. Pour G fini et Z quasi-projective, il avait été ensuite établi par Demarche, Xu et l'auteur [Cao et al. 2019a, Proposition 6.6]. Si Z est projective, $\pi_1(Z_{\bar{k}})$ est fini et G est une extension d'un k-groupe fini par un tore, Balestrieri [2018, Theorem 1.9] a établi une variante simple, où elle considère l'obstruction de Brauer–Manin algébrique étale.

Par ailleurs, dans [Poonen 2010, §3.2 ; 2017, §8], on définit deux ensembles
$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{descent}} := \bigcap_{\substack{f:Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ linéaire}}} \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)), \tag{1-2}$$
$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{descent, descent}} := \bigcap_{\substack{f:Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ linéaire}}} \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{descent}}). \tag{1-3}$$

On a $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{descent}}$ et $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{descent, descent}}$. Ceci définit deux nouvelles obstructions au principe de Hasse pour X, appelées *obstruction de descente* et *obstruction de descente itérée*. D'après la série de travaux [Demarche 2009b ; Skorobogatov 2009 ; Cao et al. 2019a], on a $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{descent}}$ lorsque X est quasi-projective [Cao et al. 2019a, Theorem 1.5]. Du théorème 1.1 on déduit facilement le :

Théorème 1.2. *Pour toute variété quasi-projective lisse géométriquement intègre X, on a*
$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{descent, descent}} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{descent}}.$$

L'idée clé de la démonstration du théorème 1.1 est la notion de sous-groupe de Brauer invariant [Cao 2018, définition 3.1], que nous rappelons ici :

Définition 1.3. Soit G un groupe algébrique connexe.

(1) Soit (X, ρ) une G-variété lisse connexe. *Le sous-groupe de Brauer G-invariant* de X est le sous-groupe
$$\mathrm{Br}_G(X) := \{b \in \mathrm{Br}(X) \ : \ (\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in p_1^*\mathrm{Br}(G)\}$$
de $\mathrm{Br}(X)$, où $G \times X \xrightarrow{p_1} G$, $G \times X \xrightarrow{p_2} X$ sont les projections et $G \times X \xrightarrow{\rho} X$ est l'action de G.

(2) Soit X une G-variété lisse quelconque. *Le sous-groupe de Brauer G-invariant* de X est le sous-groupe $\mathrm{Br}_G(X) \subset \mathrm{Br}(X)$ des éléments α vérifiant $\alpha|_{X'} \in \mathrm{Br}_G(X')$ pour toute composante connexe X' de X.

(3) Soient F un k-groupe fini et X une G-variété lisse quelconque. Un F-torseur $Y \xrightarrow{f} X$ est *G-compatible* s'il existe une action de G sur Y telle que f soit un G-morphisme.

D'après la proposition 3.3, l'action de G sur Y vérifiant les conditions ci-dessus est unique et le F_σ-torseur f_σ est aussi G-compatible pour tout $\sigma \in H^1(k, F)$. On définit la variante de $X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ suivante :

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G} := \bigcap_{\substack{f:Y \xrightarrow{F} X \ G\text{-compatible} \\ F \text{ fini}}} \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Y_\sigma)}). \tag{1-4}$$

Alors $X(k) \subset X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subset X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G}$. Ceci définit une obstruction au principe de Hasse pour X, appelée *obstruction de Brauer–Manin étale invariante*.

Le théorème suivant joue un rôle clé dans la démonstration du théorème 1.1.

Théorème 1.4. *Soient G un groupe linéaire connexe et X une G-variété lisse. Alors*

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G} = X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}}.$$

Dans le cas où X est un G-espace homogène à stabilisateur géométrique connexe, tout torseur G-compatible sous un k-groupe fini est constant, d'après le corollaire 3.5(4). Donc on peut obtenir facilement le résultat suivant.

Corollaire 1.5. *Soient G un groupe linéaire connexe et X un G-espace homogène à stabilisateur géométrique connexe. Alors*

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}} = X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G} = X(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)}.$$

Ce résultat particulier peut s'établir aussi via l'approximation forte sur X par rapport à $\mathrm{Br}_G(X)$ (voir [Borovoi et Demarche 2013, Theorem 1.4]).

Donnons maintenant la structure de l'article.

Au paragraphe 2, sur un corps k quelconque, s'inspirant de la notion de torseur universel de Colliot-Thélène et Sansuc, on introduit la notion de torseur universel de n-torsion (définition 2.1). Ensuite, on utilise cette notion à établir une formule de Künneth spéciale pour la cohomologie étale de degré 2.

Au paragraphe 3, sur un corps k de caractéristique zéro, on considère la donnée d'un k-groupe algébrique G, d'une G-variété X lisse, d'un k-groupe fini F, d'un torseur $Y \to X$ sous F, on donne des conditions équivalentes pour le relèvement, de façon compatible, de l'action de G sur X en une action sur Y. Ce relèvement n'est pas toujours possible. On étudie les homomorphismes surjectifs de groupes algébriques connexes $H \to G$ avec une action compatible de H sur Y, et on montre qu'il existe un objet minimal H_Y. Étant donné un élément $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$, en utilisant la formule de Künneth ci-dessus, on montre ensuite qu'il existe un torseur $Y \to X$ sous un k-groupe fini commutatif F tel que l'image réciproque de α dans $\mathrm{Br}(Y)$ soit invariante sous H_Y.

Au paragraphe 4, on rappelle des notions et des résultats établis dans [Cao 2018, §3], en particulier, la notion de sous-groupe de Brauer invariant et aussi ses propriétés élémentaires. Ces résultats seront utilisés dans les paragraphes 5 et 6.

Au paragraphe 5, le corps de base k est un corps de nombres. Dans [Cao 2018], étant donné un torseur $Y \to X$ sous un groupe linéaire connexe G, j'ai développé la méthode de descente des points adéliques orthogonaux aux sous-groupes de Brauer invariants. Au paragraphe 5, on donne deux nouvelles variantes de cette descente. La première (proposition 5.1) traite du cas où G est un k-groupe fini commutatif. La seconde (proposition 5.5) implique l'obstruction de Brauer–Manin étale invariante.

Les paragraphes 3, 4 et 5 sont utilisés de façon essentielle au paragraphe 6 où l'on établit le théorème 1.4.

Au paragraphe 7, en combinant le théorème 1.4 et la proposition 5.5, on établit les théorèmes 1.1 et 1.2.

Conventions et notations. Soit k un corps quelconque de caractéristique $\mathrm{char}(k)$. On note $\bar{k}$ une clôture algébrique, k_s une clôture séparable et $\Gamma_k := \mathrm{Gal}(k_s/k)$. Si $\mathrm{char}(k) = 0$, on a $k_s = \bar{k}$ et $\Gamma_k := \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

Tous les groupes de cohomologie sont des groupes de cohomologie étale.

Une k-variété X est un k-schéma séparé de type fini. Pour X une telle variété, on note $k[X]$ son anneau des fonctions globales, $k[X]^\times$ son groupe des fonctions inversibles, $\mathrm{Pic}(X) := H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Picard et $\mathrm{Br}(X) := H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Brauer. Notons

$$\mathrm{Br}_1(X) := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_{\bar{k}})] \quad \text{et} \quad \mathrm{Br}_a(X) := \mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Im}\mathrm{Br}(k).$$

Le groupe $\mathrm{Br}_1(X)$ est le sous-groupe “algébrique” du groupe de Brauer de X. Si X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles et $\pi_1(X, \bar{x})$ (ou $\pi_1(X)$) son groupe fondamental étale, où $\bar{x}$ est un point géométrique de X. Soit $\pi_1(X_{k_s})^{\mathrm{ab}}$ le quotient maximal abélien de $\pi_1(X_{k_s})$. Alors $\pi_1(X_{k_s})^{\mathrm{ab}}$ est un Γ_k-module.

Un k-groupe algébrique G est une k-variété qui est un k-schéma en groupes. On note e_G l'unité de G et $G^* := \mathrm{Hom}_{k_s\text{-groupe}}(G_{k_s}, \mathbb{G}_m)$ le groupe des caractères de G_{k_s}. C'est un module galoisien de type fini. De plus, si G est connexe sur $\mathbb{C}$, le groupe $\pi_1(G)$ est commutatif (cf. [Brion et Szamuely 2013, Proposition 1.1(2)]).

Un k-groupe fini F est un k-groupe algébrique qui est fini sur k. Dans ce cas, F est déterminé par le Γ_k-groupe $F(k_s)$. Pour toute k-variété lisse connexe X, on a un isomorphisme canonique [SGA 1 1971, §XI.5] :

$$H^1(\pi_1(X), F(k_s)) \xrightarrow{\sim} H^1(X, F) \quad \text{et donc} \quad H^1(X_{k_s}, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(X_{k_s}), F(k_s))/\sim \tag{1-5}$$

où l'action de $\pi_1(X)$ sur $F(k_s)$ est induite par celle de Γ_k et $\sim$ est induite par la conjugaison.

Soit G un k-groupe algébrique. Une *G-variété* (X, ρ) (ou X) est une k-variété X munie d'une action à gauche $G \times_k X \xrightarrow{\rho} X$. Un k-morphisme de G-variétés est appelé *G-morphisme* s'il est compatible avec l'action de G.

Comme déjà indiqué ci-dessus, pour tout k-groupe algébrique F, tout F-torseur $f : Y \to X$ et tout $\sigma \in H^1(k, F)$, on note F_σ (resp. $f_\sigma : Y_\sigma \to X$) le tordu de F (resp. de f). Ainsi f_σ est un F_σ-torseur.

2. Torseur universel de n-torsion et formule de Künneth de degré 2

Dans toute cette section, k est un corps quelconque. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété. Fixons un entier $n \geq 2$ avec $\mathrm{char}(k) \nmid n$ et notons $- \otimes - := - \otimes_{\mathbb{Z}/n} -$.

Cette section contient deux parties. On introduit d'abord la version de n-torsion de la notion de torseur universel (Colliot-Thélène et Sansuc) dans la définition 2.1, et aussi la notion de type prolongé d'un torseur (Harari et Skorobogatov) dans la proposition 2.2. En utilisant ces notions, on considère ensuite le cup-produit de la cohomologie étale de degré 2 sur un produit de deux variétés quelconques et on établit une formule de Künneth pour ce produit (proposition 2.6). Cette formule généralise un résultat de Skorobogatov et Zarhin, qui traite du cas où les deux variétés sont propres.

Soient $\mathrm{Sh}(k)$ la catégorie des faisceaux étales sur le petit site de $\operatorname{Spec} k$ et $D^+(k)$ la catégorie dérivée bornée à gauche de $\mathrm{Sh}(k)$ et $D^b(k)$ la catégorie dérivée bornée de $\mathrm{Sh}(k)$ (une sous-catégorie pleine de $D^+(k)$). Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a les sous-catégories canoniques $D^{\geq i}(k)$ et $D^{\leq i}(k)$ de $D^+(k)$ et deux foncteurs canoniques $\tau_{\leq i}$, $\tau_{\geq i}$ [Kashiwara et Schapira 2006, Definition 12.3.1, Proposition 13.1.5]. Donc $\mathrm{Sh}(k) = D^{\geq 0}(k) \cap D^{\leq 0}(k)$ est une sous-catégorie pleine canonique de $D^+(k)$. Par abus de notation, pour un objet M de $\mathrm{Sh}(k)$, on note M l'objet de $D^+(k)$ représenté par le complexe qui consiste en M en degré 0.

Soient X une variété géométriquement intègre et $p : X \to \operatorname{Spec} k$ le morphisme de structure. Soit S_X un groupe de type multiplicatif tel que $S_X^* \cong H^1(X_{k_s}, \mu_n)$ comme Γ_k-modules. On rappelle que $H^1(X_{k_s}, \mu_n)$ est fini.

Dans $D^+(k)$, il existe deux morphismes canoniques $\mathbb{G}_m \to Rp_*\mathbb{G}_m$ et $\mu_n \to Rp_*\mu_n$. Soient Δ le cône de $\mathbb{G}_m[1] \to Rp_*\mathbb{G}_m[1]$ et Δ_n le cône de $\mu_n[1] \to Rp_*\mu_n[1]$. La suite exacte de Kummer donne un diagramme commutatif de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\Delta_n[-2] \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mu_n \arrow[r] \arrow[d] & Rp_*\mu_n \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
\Delta[-2] \arrow[r] \arrow[d, "n\cdot"] & \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d, "n\cdot"] & Rp_*\mathbb{G}_m \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "n\cdot"] & {} \\
\Delta[-2] \arrow[r] \arrow[d, "+1"] & \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d, "+1"] & Rp_*\mathbb{G}_m \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "+1"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Les faisceaux de cohomologie des complexes Δ_n et Δ se calculent comme suit :

$$\Delta_n \in D^{\geq 0}(k), \quad \mathcal{H}^0(\Delta_n) \cong H^1(X_{k_s}, \mu_n) \cong S_X^*,$$
$$\Delta \in D^{\geq -1}(k), \quad \mathcal{H}^{-1}(\Delta) = k_s[X]^\times / k_s^\times \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^0(\Delta) = \mathrm{Pic}(X_{k_s}).$$

Le morphisme $\psi : \Delta_n \to \Delta$ induit un morphisme $\psi_{\leq 0} := \tau_{\leq 0}\psi : S_X^* \to \tau_{\leq 0}\Delta$.

Harari et Skorobogatov montrent que, pour tout groupe de type multiplicatif S, on a une suite exacte naturelle [2013, Proposition 1.1, où $\tau_{\leq 0}\Delta$ est noté $KD'(X)$] :

$$H^1(k, S) \to H^1(X, S) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \tau_{\leq 0}\Delta) \to H^2(k, S). \tag{2-1}$$

Définition 2.1. Un *torseur universel de n-torsion* pour X est un S_X-torseur $\mathcal{T}_X$ sur X tel que $\chi([\mathcal{T}_X]) = \psi_{\leq 0} : S_X^* \to \tau_{\leq 0}\Delta$.

D'après [Harari et Skorobogatov 2013, Proposition 1.3], si $X(k) \neq \varnothing$, pour chaque $x \in X(k)$, il existe alors un unique torseur universel de n-torsion $\mathcal{T}_X$ pour X tel que $x^*[\mathcal{T}_X] = 0 \in H^1(k, S_X)$.

Dans le cas où k est un corps de nombres, il existe un torseur universel de n-torsion pour X lorsque $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(X)} \neq \varnothing$ [Harari et Skorobogatov 2013, Corollary 3.6].

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{T}_X$ un torseur universel de n-torsion pour X. Soit S un groupe de type multiplicatif tel que $n \cdot S = 0$. Alors, pour tout S-torseur Y sur X, il existe un unique homomorphisme $\phi : S_X \to S$ tel que*

$$\phi_*([\mathcal{T}_X]) - [Y] \in \mathrm{Im}(H^1(k, S) \to H^1(X, S)).$$

Démonstration. Le triangle $\Delta_n \to \Delta \xrightarrow{n\cdot} \Delta \xrightarrow{+1}$ induit une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \Delta[-1]) \to \mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \Delta_n) \to \mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \Delta) \xrightarrow{n\cdot} \mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \Delta).$$

Puisque $S^* \in D^{\leq 0}(k)$ et $n \cdot S^* = 0$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \Delta[-1]) = \mathrm{Hom}_k(S^*, \mathcal{H}^{-1}(\Delta)) = \mathrm{Hom}_k(S^*, \bar{k}[X]^\times/\bar{k}^\times) = 0$$

et donc $\mathrm{Hom}_k(S^*, S_X^*)$ est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, S_X^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \Delta_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \Delta) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \tau_{\leq 0}\Delta).$$

Alors $\chi([Y]) \in \mathrm{Hom}_{D^+(k)}(S^*, \tau_{\leq 0}\Delta)$ donne un homomorphisme $\phi^* \in \mathrm{Hom}_k(S^*, S_X^*)$, et donc $\chi([Y]) = \psi_{\leq 0} \circ \phi^*$. Soit $\phi : S_X \to S$ l'homomorphisme correspondant. La suite exacte (2-1) implique l'énoncé. $\square$

L'homomorphisme ϕ dans la proposition 2.2 est appelé *le n-type de* $[Y]$.

Soit $\mathcal{T}_X$ le torseur universel de n-torsion pour X_{k_s}, on obtient un isomorphisme de Γ_k-modules :

$$\tau_{X,S} : \mathrm{Hom}_{k_s}(S_X, S) \cong \mathrm{Hom}_{k_s}(S^*, S_X^*) \to H^1(X_{k_s}, S) : \phi \mapsto \phi_*([\mathcal{T}_X]). \tag{2-2}$$

En particulier, on a deux Γ_k-isomorphismes naturels

$$\tau_X := \tau_{X,\mu_n} : S_X^* \xrightarrow{\sim} H^1(X_{k_s}, \mu_n) : \phi \mapsto \phi_*(\mathcal{T}_X) \tag{2-3}$$

et

$$\tau_X(-1) := \tau_{X,\mathbb{Z}/n} : \mathrm{Hom}_{k_s}(S_X, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{k_s}, \mathbb{Z}/n) : \phi \mapsto \phi_*(\mathcal{T}_X). \tag{2-4}$$

En fait, par définition, τ_X est exactement l'homomorphisme $S_X^* \to \mathcal{H}^0(\Delta_n)$ induit par $\psi_{\leq 0}$.

Rappelons que, pour tous $F_1, F_2 \in D^b(k)$, le produit tensoriel $F_1 \otimes^L F_2$ est bien défini et *le cup-produit* est le homomorphisme canonique

$$\cup_j : \bigoplus_{r+s=j} \mathcal{H}^r(F_1) \otimes \mathcal{H}^s(F_2) \to \mathcal{H}^j(F_1 \otimes^L F_2)$$

induit par la suite spectrale de Godement (cf. [Milne 1980, Lemma VI.8.6] ou [Fu 2011, Proposition 6.4.12]). De plus, $Rp_*\mu_n \in D^b(k)$ [Fu 2011, Corollary 7.5.6].

Corollaire 2.3. *Supposons que k est séparablement clos. Soit $p : X \to \operatorname{Spec} k$ une variété intègre. Alors*

(1) *le cup-produit* $\cup : H^1(X, \mu_n) \otimes \operatorname{Hom}(\mu_n, S) \to H^1(X, S) : (\alpha, \varphi) \mapsto \varphi_*(\alpha)$ *est un isomorphisme ;*

(2) *pour tout complexe de $\mathbb{Z}/n$-modules* (vus comme k-faisceaux) *de type fini F avec $F \in D^{\geq 0}(k) \cap D^b(k)$, on a $Rp_*\mu_n \otimes^L F \in D^{\geq 0}(k)$ et le cup-produit*

$$\cup_j(F) : \bigoplus_{r+s=j} R^r p_*\mu_n \otimes \mathcal{H}^s(F) \cong \bigoplus_{r+s=j} \mathcal{H}^r(Rp_*\mu_n) \otimes \mathcal{H}^s(F) \to \mathcal{H}^j(Rp_*\mu_n \otimes^L F)$$

est un isomorphisme pour $j = 0$ et $j = 1$;

(3) *dans* (2), *si $\mathcal{H}^0(F)$ est plat, alors $\cup_2(F)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Puisque $X(k) \neq \varnothing$, il existe un torseur universel de n-torsion $\mathcal{T}_X \to X$. D'après (2-2), on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}(S_X, \mu_n) \otimes \operatorname{Hom}(\mu_n, S) \arrow[r, "- \circ -", "\cong"'] \arrow[d, "\tau_X \otimes id", "\cong"'] & \operatorname{Hom}(S_X, S) \arrow[d, "\tau_{X,S}", "\cong"'] \\ H^1(X, \mu_n) \otimes \operatorname{Hom}(\mu_n, S) \arrow[r, "\cup"] & H^1(X, S) \end{tikzcd}$$

où $- \circ - : (\psi, \phi) \mapsto \phi \circ \psi$. Ce diagramme est commutatif car

$$\tau_{X,S}(\varphi \circ \phi) = (\varphi \circ \phi)_*[\mathcal{T}_X] = \varphi_*(\phi_*[\mathcal{T}_X]) \overset{(2\text{-}3)}{=} \tau_X[\phi] \cup \varphi$$

pour tout $\phi \in \operatorname{Hom}(S_X, \mu_n)$ et tout $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mu_n, S)$. Donc on a (1).

Pour tout complexe F dans (2), puisque la dimension cohomologique de Rp_* est finie [SGA 4_3 1973, XIV] (cf. [Fu 2011, Corollary 7.5.6]), on a :

(i) D'après [SGA 4_3 1973, XVII. Theorem 5.2.11], pour tout $j < 0$, on a $\mathcal{H}^j(Rp_*\mu_n \otimes^L F) = 0$ et donc $Rp_*\mu_n \otimes^L F \in D^{\geq 0}(k)$. Ceci implique le premier énoncé de (2).

(ii) Si $F \cong \mathcal{H}^0(F)$ avec $\mathcal{H}^0(F)$ plat, on a $\mathcal{H}^j(Rp_*\mu_n \otimes^L F) = \mathcal{H}^j(Rp_*\mu_n) \otimes F$ et donc $\cup_j(F)$ est un isomorphisme pour tout j.

(iii) Si $F \cong \mathcal{H}^0(F)$, on a $Rp_*\mu_n \otimes^L F \cong Rp_*(\mu_n \otimes p^*F)$ [SGA 4_3 1973, XVII. (5.2.11.1)] (cf. [Fu 2011, Corollary 6.5.6]). Puisque X est intègre, $\cup_0(F) : \mu_n \otimes F \to R^0 p_*(\mu_n \otimes p^*F)$ est un isomorphisme, et d'après l'énoncé (1) et [Milne 1980, Proposition V.1.20], le cup-produit

$$\cup_1(F) : R^1 p_*\mu_n \otimes F \cong H^1(X, \mu_n) \otimes \operatorname{Hom}(\mu_n, \mu_n \otimes F) \xrightarrow{\cup} H^1(X, \mu_n \otimes F) \cong \mathcal{H}^1(Rp_*(\mu_n \otimes p^*F))$$

est un isomorphisme. Ceci vaut seulement pour le cup-produit de degré 1.

Pour tout complexe F dans (2), notons $F_+ := (\tau_{\geq 1} F)[1]$ un objet dans $D^{\geq 0}(k) \cap D^b(k)$. Alors F_+ vérifie toutes les hypothèses dans (2).

Le triangle $\mathcal{H}^0(F) \to F \to F_+[-1] \xrightarrow{+1}$ donne un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^j(\mathcal{H}^0(F)) \arrow[r] \arrow[d, "\cup_j(\mathcal{H}^0(F))"] & \bigoplus_{r+s=j} R^r(\mathcal{H}^s(F)) \arrow[r] \arrow[d, "\cup_j(F)"] & \bigoplus_{r+s=j-1} R^r(\mathcal{H}^s(F_+)) \arrow[r] \arrow[d, "\cup_{j-1}(F_+)"] & 0 \arrow[d] \\
H^{j-2}_{\mu_n}(F_+) \arrow[r, "\theta_{j-1}"] & H^j_{\mu_n}(\mathcal{H}^0(F)) \arrow[r] & H^j_{\mu_n}(F) \arrow[r] & H^{j-1}_{\mu_n}(F_+) \arrow[r, "\theta_j"] & H^{j+1}_{\mu_n}(\mathcal{H}^0(F))
\end{tikzcd} \tag{2-5}$$

où $H^j_{\mu_n}(-) := \mathcal{H}^j(Rp_*\mu_n \otimes^L -)$, $R^r(-) := R^r p_*\mu_n \otimes -$ et la première ligne est exacte car elle est scindée.

Montrons l'énoncé (2). D'après (i), on a : $H^{-2}_{\mu_n}(F_+) = H^{-1}_{\mu_n}(F_+) = 0$. D'après (iii), $\cup_0(\mathcal{H}^0(F))$ est un isomorphisme. Le lemme des cinq implique : $\cup_0(F)$ est un isomorphisme. Ceci donne l'énoncé(2) pour $j = 0$. Donc $\cup_0(F_+)$ est un isomorphisme. D'après (iii), $\cup_1(\mathcal{H}^0(F))$ est un isomorphisme. Le lemme des cinq implique : $\cup_1(F)$ est un isomorphisme.

Montrons l'énoncé (3). Par hypothèse, $\mathcal{H}^0(F)$ est plat, et d'après (ii), $\cup_2(\mathcal{H}^0(F))$ est un isomorphisme. D'après (2), $\cup_1(F_+)$ et $\cup_0(F_+)$ sont des isomorphismes. Donc $\theta_1 = 0$ et le lemme des cinq implique : $\cup_2(F)$ est un isomorphisme. □

Si X est lisse, d'après (1-5), l'isomorphisme (2-4) donne un Γ_k-isomorphisme naturel

$$\tau_X(-1) : \mathrm{Hom}(S_X, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{k_s}, \mathbb{Z}/n) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\big(\pi_1(X_{k_s})^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Z}/n\big) : \psi \mapsto \psi(k_s) \circ \tau_{\pi_1}, \tag{2-6}$$

où $\tau_{\pi_1} : \pi_1(X_{k_s})^{\mathrm{ab}} \to S_X(k_s)$ est l'homomorphisme induit par $\mathcal{T}_X$. Ainsi τ_{π_1} induit un isomorphisme de Γ_k-modules $\pi_1(X_{k_s})^{\mathrm{ab}}/n \xrightarrow{\sim} S_X(k_s)$ et $\mathcal{T}_X$ est géométriquement intègre.

Corollaire 2.4. *Soit X une variété lisse géométriquement intègre. Soient M un $\mathbb{Z}/n$-module et*

$$\pi_1(X_{k_s})^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\theta} M$$

un homomorphisme surjectif de noyau Γ_k-invariant. Supposons qu'il existe un torseur universel de n-torsion pour X. Alors il existe un k-groupe fini commutatif S et un S-torseur $\mathcal{T} \to X$ tels que $\mathcal{T}$ soit lisse géométriquement intègre, $S(k_s) = M$ et que, dans $H^1(X_{k_s}, S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\big(\pi_1(X_{k_s})^{\mathrm{ab}}, M\big)$, on ait $[\mathcal{T}_{k_s}] = \theta$.

Démonstration. Soit $\mathcal{T}_X$ un torseur universel de n-torsion pour X (un torseur sous le k-groupe S_X). Puisque $\mathrm{Ker}(\theta)$ est Γ_k-invariant, il existe une unique Γ_k-structure sur M telle que θ soit un Γ_k-morphisme. Ceci induit un k-groupe commutatif S et un homomorphisme surjectif $\theta' : S_X \to S$ tels que $S(k_s) = M$ et que $\theta'(k_s) \circ \tau_{\pi_1} = \theta$. Alors $\mathcal{T} := \theta'_* \mathcal{T}_X := \mathcal{T}_X \times^{S_X} S$ donne l'énoncé. □

Soient U, V deux variétés géométriquement intègres sur k. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U \times_k V \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & V \arrow[d, "q_2"] \\
U \arrow[r, "q_1"] & \mathrm{Spec}\, k
\end{tikzcd} \tag{2-7}$$

Soient M, N deux $\mathbb{Z}/n$-faisceaux finis plats sur le grand site de k. Le cup-produit donne un quasi-isomorphisme [SGA 4½ 1977, Th. finitude, corolaire 1.11] (cf. [Fu 2011, Corollary 9.3.5]) :

$$\cup:\ Rq_{1,*}M\otimes^L Rq_{2,*}N\cong R(q_1\circ p_1)_*(M\otimes^L N). \tag{2-8}$$

Ceci induit le cup-produit [Fu 2011, Proposition 6.4.12] :

$$\cup_j:\bigoplus_{r+s=j}R^rq_{1,*}M\otimes_{\mathbb{Z}/n}R^sq_{2,*}N\to\mathcal{H}^j(Rq_{1,*}M\otimes^L Rq_{2,*}N)\xrightarrow{\sim}R^j(q_1\circ p_1)_*(M\otimes^L N).$$

Lemme 2.5. *Le cup-produit $\cup_j$ est un isomorphisme pour $j=0,1,2$.*

Démonstration. On peut supposer que k est séparablement clos. Les $\mathbb{Z}/n$-modules finis M, N sont plats et donc ils sont des facteurs directs de $(\mathbb{Z}/n)^{\oplus i}$ pour i assez grand. Puisque tous les foncteurs ci-dessus commutent avec les sommes directs finies, on peut supposer que $M=N=\mu_n$. L'énoncé découle du corollaire 2.3(3) et de (2-8). □

Le résultat ci-dessous généralise [Skorobogatov et Zarhin 2014, Theorem 2.6].

Proposition 2.6. *Supposons que k est séparablement clos. Soient U, V deux variétés géométriquement intègres et F un $\mathbb{Z}/n$-module fini plat. On considère le diagramme (2-7). Alors on a des isomorphismes naturels*

$$(p_1^*,p_2^*):\ H^1(U,F)\oplus H^1(V,F)\xrightarrow{\sim}H^1(U\times V,F)$$

et

$$(p_1^*,\cup,p_2^*):H^2(U,F)\oplus[H^1(U,\mathbb{Z}/n)\otimes_{\mathbb{Z}}H^1(V,F)]\oplus H^2(V,F)\xrightarrow{\sim}H^2(U\times V,F),$$

où $\cup:H^1(U,\mathbb{Z}/n)\otimes_{\mathbb{Z}}H^1(V,F)\to H^2(U\times V,F)$ est le cup-produit.

C'est clair que si U, V sont définis sur un sous-corps $k_0\subset k$ avec k/k_0 galoisienne et F un $\mathrm{Gal}(k/k_0)$-module, alors les deux isomorphismes ci-dessus sont des isomorphismes de $\mathrm{Gal}(k/k_0)$-modules.

Si $\mathrm{char}(k)=0$, cette proposition découle de [Skorobogatov et Zarhin 2014, Proposition 2.2] et de [Milne 1980, Theorem III.3.12] (on peut vérifier que l'homomorphisme dans [Skorobogatov et Zarhin 2014, Proposition 2.2] est compatible avec le cup-produit).

Démonstration. On applique le lemme 2.5 au cas $U\times k$ et au cas $k\times V$, et on obtient deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
H^i(U,\mathbb{Z}/n)\otimes H^0(k,F) \arrow[r, "\cup_U", "\cong"'] \arrow[d, "id\times q_2^*"', "\cong"] & H^i(U,F) \arrow[d, "p_1^*"] \\
H^i(U,\mathbb{Z}/n)\otimes H^0(V,F) \arrow[r, "\cup_i"] & H^i(U\times V,F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^0(k,\mathbb{Z}/n)\otimes H^i(V,F) \arrow[r, "\cup_V", "\cong"'] \arrow[d, "q_1^*\times id"', "\cong"] & H^i(V,F) \arrow[d, "p_2^*"] \\
H^0(U,\mathbb{Z}/n)\otimes H^i(V,F) \arrow[r, "\cup_i"] & H^i(U\times V,F)
\end{tikzcd}$$

pour $i=1$ et 2, où $\cup_U$ (resp. $\cup_V$) est le cup-produit sur U (resp. V). Donc

$$p_1^*(H^i(U,F))=\cup_i\big(H^i(U,\mathbb{Z}/n)\otimes H^0(V,F)\big)\quad\text{et}\quad p_2^*(H^i(V,F))=\cup_i\big(H^0(U,\mathbb{Z}/n)\otimes H^i(V,F)\big).$$

L'énoncé découle du lemme 2.5. □

Soient $\mathcal{T}_U$ (resp. $\mathcal{T}_V$) un torseur universel de n-torsion pour U (resp. pour V) et S_U (resp. S_V) le groupe correspondant (cf. définition 2.1). Skorobogatov et Zarhin [2014, §5] introduisent un homomorphisme :

$$\varepsilon : \mathrm{Hom}_k(S_U, S_V^*) \to H^2(U \times V, \mu_n) : \phi \mapsto \phi_*[\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V], \tag{2-9}$$

où $\cup$ est le cup-produit $H^1(U, S_V^*) \times H^1(V, S_V) \to H^2(U \times V, \mu_n)$. Les isomorphismes τ_V dans (2-3) et $\tau_U(-1)$ dans (2-4) donnent un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Hom}_{k_s}(S_U, \mathbb{Z}/n) \otimes S_V^*)^{\Gamma_k} \arrow[r, "="', "\Phi"] \arrow[dr, "\sim", "(\tau_U(-1), \tau_V)"'] & \mathrm{Hom}_k(S_U, S_V^*) \arrow[r, "\varepsilon"] & H^2(U \times V, \mu_n) \arrow[d] \\
& (H^1(U_{k_s}, \mathbb{Z}/n) \otimes H^1(V_{k_s}, \mu_n))^{\Gamma_k} \arrow[r, "\cup"] & H^2((U \times V)_{\bar{k}}, \mu_n),
\end{tikzcd} \tag{2-10}$$

qui est commutatif parce que, pour tous $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k_s}(S_U, \mathbb{Z}/n)$ et $\phi \in S_V^* = \mathrm{Hom}_{k_s}(S_V, \mu_n)$, on note $\phi^* := \mathrm{Hom}_{k_s}(\phi, \mu_n) : \mathbb{Z}/n \to S_V^*$ le dual de ϕ, et on a :

$$\varepsilon(\Phi(\varphi \otimes \phi)) = \varepsilon(\phi^* \circ \varphi) = (\phi^*)_*(\varphi_*[\mathcal{T}_U]) \cup [\mathcal{T}_V] \overset{(1)}{=} \varphi_*[\mathcal{T}_U] \cup \phi_*[\mathcal{T}_V] = \tau_U(-1)(\varphi) \cup \tau_V(\phi),$$

où (1) découle du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1(U \times V, S_V) \arrow[d, "\phi_*"] & \times & H^1\big(U \times V, \mathrm{Hom}_{k_s}(S_V, \mu_n)\big) \arrow[r, "\cup"] & H^2(U \times V, \mu_n) \arrow[d, "="] \\
H^1(U \times V, \mu_n) & \times & H^1\big(U \times V, \mathrm{Hom}_{k_s}(\mu_n, \mu_n)\big) \arrow[u, "(\phi^*)_* = \mathrm{Hom}_{k_s}(\phi, \mu_n)_*"'] \arrow[r, "\cup"] & H^2(U \times V, \mu_n).
\end{tikzcd}$$

Si $U(k) \neq \varnothing$, alors il existe un torseur universel de n-torsion pour U. Pour un point $u \in U(k)$, notons

$$H^i_u(U, \mu_n) := \mathrm{Ker}\big(H^i(U, \mu_n) \xrightarrow{u^*} H^i(k, \mu_n)\big).$$

Corollaire 2.7. *Sous les notations et hypothèses ci-dessus, supposons que $U(k) \neq \varnothing$ avec $u \in U(k)$ et qu'il existe des torseurs universels de n-torsion $\mathcal{T}_U$ pour U* (sous le groupe S_U) *et $\mathcal{T}_V$ pour V* (sous le groupe S_V). *Alors on a un isomorphisme* :

$$H^2_u(U, \mu_n) \oplus H^2(V, \mu_n) \oplus \mathrm{Hom}_k(S_U, S_V^*) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*, \varepsilon)} H^2(U \times V, \mu_n).$$

Démonstration. Notons $E_2^{i,j}(U) := H^i(k, H^j(U_{k_s}, \mu_n)) \Rightarrow H^{i+j}(U, \mu_n)$ la suite spectrale de Hochschild–Serre de U et $E_2^{i,j}(V)$ (resp. $E_2^{i,j}(U \times V)$) celle de V (resp. de $U \times V$).

Notons $H^i_u(U_{k_s}, \mu_n) := \mathrm{Ker}\big(H^i(U_{k_s}, \mu_n) \xrightarrow{u^*} H^i(k_s, \mu_n)\big)$. Alors $H^0_u(U_{k_s}, \mu_n) = 0$ et $H^i_u(U_{k_s}, \mu_n) = H^i(U_{k_s}, \mu_n)$ pour $i \neq 0$. La suite spectrale de Hochschild–Serre donne canoniquement une suite spectrale :

$$E_2^{i,j}(U, u) := H^i(k, H^j_u(U_{k_s}, \mu_n)) \Rightarrow H^{i+j}_u(U, \mu_n).$$

Soit $\phi_2^{i,j} : E_2^{i,j}(U, u) \oplus E_2^{i,j}(V) \to E_2^{i,j}(U \times V)$ le morphisme de suites spectrales induit par (p_1^*, p_2^*). D'après la proposition 2.6, $\phi_2^{i,j}$ est un isomorphisme pour $j = 0, 1$ et $\phi_2^{0,2}$ est injectif. Ainsi $\phi_2^{i,j}$ induit une suite exacte par le lemme des cinq :

$$0 \to H^2_u(U, \mu_n) \oplus H^2(V, \mu_n) \xrightarrow{p_1^*, p_2^*} H^2(U \times V, \mu_n) \to \operatorname{coker}(\phi_2^{0,2}).$$

D'après la proposition 2.6 et le diagramme (2-10), on a $\operatorname{coker}(\phi_2^{0,2}) \cong \big(H^1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/n) \otimes H^1(V_{\bar{k}}, \mu_n)\big)^{\Gamma_k}$ et la composition

$$\operatorname{Hom}_k(S_U, S_V^*) \xrightarrow{\varepsilon} H^2(U \times V, \mu_n) \to H^2\big((U \times V)_{\bar{k}}, \mu_n\big)^{\Gamma_k} \to \operatorname{coker}(\phi_2^{0,2})$$

est un isomorphisme, d'où le résultat. □

3. Préliminaires sur les torseurs sous un groupe fini

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété.

Soit G un groupe algébrique connexe et X une G-variété lisse géométriquement intègre. Cette section traite trois problèmes : pour un torseur $H \to G$ sous un k-groupe fini, on montre l'existence et l'unicité de la structure de groupe sur H dans paragraphe 3A ; pour un torseur $Y \to X$ sous un k-groupe fini, on donne dans paragraphe 3B une condition nécessaire et suffisante pour le relèvement, de façon compatible, de l'action de G sur X en une action sur Y ; si ce relèvement n'existe pas, on montre dans paragraphe 3C l'existence d'une isogénie minimale $H_Y \to G$ telle que l'action de H_Y puisse être relevée en une action sur Y.

3A. ***Torseur sur un groupe algébrique.*** Pour un groupe algébrique connexe G, tout recouvrement étale fini de $G_{\bar{k}}$ est une extension centrale de $G_{\bar{k}}$ [Brion et Szamuely 2013, Proposition 1.1(1)]. Le résultat suivant généralise ce résultat au corps de base et il est aussi un analogue d'un résultat de Colliot-Thélène [2008, Theorem 5.6].

Proposition 3.1. *Soit G un groupe algébrique connexe, S un k-groupe fini commutatif et $\psi : H \to G$ un S-torseur avec H géométriquement intègre sur k. S'il existe un point $e_H \in H(k)$ avec $\psi(e_H) = e_G$, alors il existe une unique structure de k-groupe algébrique sur H telle que ψ soit un homomorphisme et que e_H soit l'unité.*

De plus, dans ce cas, $\operatorname{Ker}(\psi) = S$ *et l'action de S sur H est compatible avec la multiplication de H.*

Démonstration. L'existence d'une structure de groupe sur H est équivalente à l'existence d'un couple de morphismes (m_H, i_H) satisfaisant certaines relations où $m_H : H \times H \to H$ est la multiplication et $i_H : H \to H$ est l'inverse.

Pour l'unicité, s'il existe deux structures de groupe sur H, soient (m_H, i_H), (m'_H, i'_H) les couples de morphismes correspondants. Soient m_G la multiplication de G et i_G l'inverse de G. Alors

$$\psi \circ m_H = m_G \circ (\psi \times \psi) = \psi \circ m'_H, \quad m_H(e_H \times e_H) = e_H = m'_H(e_H \times e_H),$$
$$\psi \circ i_H = i_G \circ \psi = \psi \circ i'_H, \quad i_H(e_H) = e_H = i'_H(e_H).$$

Puisque ψ est fini étale et $H \times H$ est intègre, on a $m_H = m'_H$ et $i_H = i'_H$ [Milne 1980, Corollary I.3.13]. Ceci donne l'unicité de (m_H, i_H).

Pour l'existence de la structure de groupe (i.e., l'existence de (m_H, i_H)), par la descente galoisienne et l'unicité de (m_H, i_H), il suffit d'établir l'existence de (m_H, i_H) sur $\bar{k}$. On peut supposer que $k = \bar{k}$. Dans ce cas, ψ est fini étale galoisien avec $\mathrm{Aut}(H/G) \cong S(\bar{k})$. D'après [Brion et Szamuely 2013, Proposition 1.1(1)], il existe une structure de groupe sur H telle que $\psi : H \to G$ soit une isogénie centrale. Notons $- \cdot -$ la multiplication et $(-)^{-1}$ l'inverse de cette structure de groupe. Soit $c := e_H \cdot e_H$ et $d := e_H \cdot c^{-1}$. Les points e_H, c et d sont dans $\mathrm{Ker}(\psi)$ et donc dans le centre de H. Alors les morphismes $m'_H : H \times H \to H : (h_1, h_2) \mapsto d \cdot h_1 \cdot h_2$ et $i'_H : H \to H : h \mapsto c \cdot h^{-1}$ définissent sur H une nouvelle structure de groupe et cette structure vérifie les hypothèses ci-dessus.

Pour le dernier énoncé, puisque $S \subset \mathrm{Ker}(\psi)$, l'action de S induit une inclusion de Γ_k-module $S(\bar{k}) \subset \mathrm{Aut}(H_{\bar{k}}/G_{\bar{k}})$ et la multiplication de H induit une inclusion $\mathrm{Ker}(\psi)(\bar{k}) \subset \mathrm{Aut}(H_{\bar{k}}/G_{\bar{k}})$ de Γ_k-module. Puisque $\#\mathrm{Aut}(H_{\bar{k}}/G_{\bar{k}}) = \deg(\psi)$, les deux inclusions ci-dessus sont isomorphes, d'où le résultat. □

Corollaire 3.2. *Soit G un groupe algébrique connexe. Pour tout $\mathbb{Z}/n$-module fini M et tout homomorphisme surjectif $\pi_1(G_{\bar{k}}) \xrightarrow{\theta} M$ de noyau Γ_k-invariant, il existe un unique groupe algébrique connexe H isogène à G, i.e., muni d'un homomorphisme fini surjectif $\psi : H \to G$, tel que $(\mathrm{Ker}(\psi))(\bar{k}) \cong M$ et que la composition $\pi_1(H_{\bar{k}}) \xrightarrow{\psi_{\pi_1}} \pi_1(G_{\bar{k}}) \xrightarrow{\theta} M$ soit nulle.*

De plus, pour tout groupe algébrique connexe H_1, tout homomorphisme fini surjectif $\psi_1 : H_1 \to G$ vérifiant $\theta \circ \psi_{1,\pi_1} = 0$ se factorise par ψ.

Démonstration. Puisque $G(k) \neq \varnothing$, il existe un unique torseur universel de n-torsion $\mathcal{T}_G$ (un S_G-torseur sur G) tel que $\mathcal{T}_G|_{e_G} \cong S_G$.

D'après le corollaire 2.4, il existe un k-groupe fini commutatif S et un S-torseur $H \xrightarrow{\psi} G$ tels que $S(\bar{k}) = M$ et que l'homomorphisme $\pi_1(G_{\bar{k}}) \to S(\bar{k})$ induit par $[H_{\bar{k}}]$ soit θ. Donc la composition $\theta \circ \psi_{\pi_1}$ est nulle. Après avoir tordu par un élément de $H^1(k, S)$, on peut supposer que $[H]|_{e_G} = 0 \in H^1(k, S)$. D'après la proposition 3.1, il existe une structure de groupe sur H telle que ψ soit un homomorphisme et que $\mathrm{Ker}(\psi) = S$.

Pour tout groupe algébrique connexe H_1 et tout homomorphisme fini surjectif $\psi_1 : H_1 \to G$, le noyau ψ_1 est commutatif et on a une suite exacte de Γ_k-modules :

$$\pi_1(H_{1,\bar{k}}) \to \pi_1(G_{\bar{k}}) \to \mathrm{Ker}(\psi_1)(\bar{k}) \to 0.$$

Ceci donne un homomorphisme surjectif de Γ_k-modules $\theta_1 : \mathrm{Ker}(\psi_1)(\bar{k}) \to M \cong S(\bar{k})$ et, puisque $[H_1]|_{e_G} = 0 = [H]|_{e_G}$, on a $\theta_{1,*}([H_1]) = [H] \in H^1(X, S)$. En utilisant l'action de S, on a un $\mathrm{Ker}(\psi_1)$-morphisme $\phi : H_1 \to H$ au-dessus de G tel que $\phi(e_{H_1}) = e_H$. Soient $\chi_1, \chi_2 : H_1 \times H_1 \to H$ deux morphismes avec $\chi_1(h_1, h_2) = \phi(h_1 \cdot h_2)$ et $\chi_2(h_1, h_2) = \phi(h_1) \cdot \phi(h_2)$ pour tous $h_1, h_2 \in H_1$. Alors $\chi_1(e_{H_1}, e_{H_1}) = \chi_2(e_{H_1}, e_{H_1})$ et $\psi \circ \chi_1 = \psi \circ \chi_2$. Ceci induit :

$$\chi : H_1 \times_k H_1 \xrightarrow{\chi_1, \chi_2} H \times_G H \cong H \times_k S \xrightarrow{p_2} S.$$

Puisque H_1 est connexe, on a $\mathrm{Im}(\chi)=e_S$, $\chi_1=\chi_2$ et ϕ est un homomorphisme. □

3B. ***Relèvement d'une action par un torseur.*** Soient G un groupe algébrique connexe et (X,ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. Soient F un k-groupe fini et $f:Y\to X$ un F-torseur. Notons $p_1:G\times X\to G$, $p_2:G\times X\to X$ les deux projections.

D'après [SGA 1 1971, X.2.2], on a deux suites exactes de groupes fondamentaux

$$1\to\pi_1(X_{\bar{k}})\to\pi_1(X)\to\Gamma_k\to 1\quad\text{et}\quad 1\to\pi_1((G\times X)_{\bar{k}})\to\pi_1(G\times X)\to\Gamma_k\to 1.$$

D'après [SGA 1 1971, XII.5.2], on a $\pi_1((G\times X)_{\bar{k}})\cong\pi_1(G_{\bar{k}})\times\pi_1(X_{\bar{k}})$, car ceci vaut pour les espaces topologiques. Alors on a une suite exacte de groupes fondamentaux :

$$1\to\pi_1(G_{\bar{k}})\to\pi_1(G\times X)\xrightarrow{p_{2,\pi_1}}\pi_1(X)\to 1$$

qui admet une section induite par $i_e:X\to G\times X:x\mapsto(e_G,x)$ et l'action de $\pi_1(X)$ sur $\pi_1(G_{\bar{k}})$ se factorise par Γ_k. D'après (1-5), cette suite exacte induit une suite exacte d'ensembles pointés (voir [Serre 1964, §5.8])

$$1\to H^1(X,F)\xrightarrow{p_2^*}H^1(G\times X,F)\xrightarrow{\iota}H^1(G_{\bar{k}},F)^{\Gamma_k}\tag{3-1}$$

et p_2^* admet une section induite par i_e^*.

Proposition 3.3. *Soient G un groupe algébrique connexe et (X,ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. Soient F un k-groupe fini et $f:Y\to X$ un F-torseur. Alors les hypothèses ci-dessous sont équivalentes :*

(a) *on a $\rho^*([Y])=p_2^*([Y])\in H^1(G\times X,F)$;*

(b) *pour ι dans (3-1), on a $\iota(\rho^*([Y]))=0\in H^1(G_{\bar{k}},F)$;*

(c) *le F-torseur Y est G-compatible, i.e., l'action de G sur X se relève en une action sur Y ;*

(d) *il existe un morphisme $\rho_Y:G\times Y\to Y$ tel que $\rho_Y|_{e_G\times Y}=\mathrm{id}_Y$ et que ρ_Y soit compatible avec ρ, i.e., $\rho\circ(\mathrm{id}_G\times f)=f\circ\rho_Y$.*

De plus, sous les hypothèses ci-dessus, on a

(1) *l'action de G sur Y pour laquelle f est un G-morphisme est unique ;*

(2) *l'action de G et celle de F commutent ;*

(3) *pour tout $\sigma\in H^1(k,F)$, le F_σ-torseur Y_σ est G-compatible.*

Démonstration. Puisque $i_e^*(p_2^*([Y]))=i_e^*(\rho^*([Y]))$ dans $H^1(X,F)$, l'équivalence (a)⇔(b) découle de la suite exacte (3-1).

Lemme 3.4. *Pour tout k-schéma de type fini Z et tous morphismes $\theta_1,\theta_2:G\times Z\to Y$, si $f\circ\theta_1=f\circ\theta_2$ et $\theta_1|_{e_G\times Z}=\theta_2|_{e_G\times Z}$, alors $\theta_1=\theta_2$.*

Démonstration. En fait, θ_1, θ_2 induisent un morphisme

$$\theta : G \times Z \xrightarrow{(\theta_1,\theta_2)} Y \times_X Y \cong Y \times_k F \xrightarrow{\mathrm{pr}_F} F$$

tel que $\theta(e_G \times Z) = e_F$. Puisque G est intègre, $\theta(G \times Z) = e_F$ et donc $\theta_1 = \theta_2$. □

Pour (a)⇒(d), soient ρ^*Y le pullback de Y par ρ et $p_2^*Y := G \times Y$. Notons $\mathrm{Mor}_F(p_2^*Y, F)$ l'ensemble des morphismes $\chi : p_2^*Y \to F$ tels que $\chi(a \cdot y) = a \cdot \chi(y) \cdot a^{-1}$ pour tous $a \in F$ et $y \in p_2^*Y$. Définissons de même $\mathrm{Mor}_F(Y, F)$. Alors $Y \cong e_G \times Y \subset p_2^*Y$ induit un morphisme surjectif $\mathrm{Mor}_F(p_2^*Y, F) \xrightarrow{\mathrm{Mor}(i_e)} \mathrm{Mor}_F(Y, F)$, car il existe une section induite par p_2. Par hypothèse, on a un isomorphisme de F-torseur $p_2^*Y \xrightarrow{\phi} \rho^*Y$. Pour tout isomorphisme ϕ_1, l'argument classique montre qu'il existe un $\chi_1 \in \mathrm{Mor}_F(p_2^*Y, F)$ tel que $\phi_1 = \chi_1 \cdot \phi$. Puisque $\mathrm{Mor}(i_e)$ est surjectif, on peut supposer que $\phi|_{e_G \times X}$ est l'identité de Y. Le morphisme $\rho_Y : G \times Y \xrightarrow{\phi} \rho^*Y \to Y$ donne (d).

Pour (d)⇒(c), l'hypothèse (d) donne un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_Y : & e_G \times Y \arrow[r, "i_{e,Y}"] \arrow[d, "f"] & G \times Y \arrow[r, "\rho_Y"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times f"] & Y \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{id}_X : & e_G \times X \arrow[r, "i_e"] & G \times X \arrow[r, "\rho"] & X
\end{tikzcd} \tag{3-2}$$

tel que $\rho_Y \circ i_{e,Y} = \mathrm{id}_Y$. Soient $\theta_1, \theta_2 : G \times G \times Y \to Y$ les deux morphismes définis par

$$\theta_1(g_1, g_2, y) = g_1 \cdot (g_2 \cdot y) \quad \text{et} \quad \theta_2(g_1, g_2, y) = (g_1 \cdot g_2) \cdot y$$

pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $y \in Y$. Alors $\theta_1(e_G, g_2, y) = \theta_2(e_G, g_2, y)$ et le lemme 3.4 montre que $\theta_1 = \theta_2$. Donc ρ_Y est une action et f est un G-morphisme. Ceci donne (c).

Supposons (c) et montrons (1), (2), (3) et (a).

L'hypothèse (c) donne aussi le diagramme commutatif (3-2) avec ρ_Y l'action relevée de G sur Y.

Soient θ_1, θ_2 deux actions de G sur Y telles que f soit un G-morphisme. Puisque $f \circ \theta_1 = \rho \circ (\mathrm{id}_G \times f) = f \circ \theta_2$, On applique le lemme 3.4 à $\theta_1, \theta_2 : G \times Y \to Y$ et on obtient (1).

Soient $\theta_1, \theta_2 : G \times F \times Y \to Y$ les deux morphismes définis par

$$\theta_1(g, a, y) = g \cdot (a \cdot y) \quad \text{et} \quad \theta_2(g, a, y) = a \cdot (g \cdot y)$$

pour tous $g \in G$, $a \in F$ et $y \in Y$. Alors

$$\theta_1(e_G, a, y) = a \cdot y = \theta_2(e_G, a, y) \quad \text{et} \quad (f \circ \theta_1)(g, a, y) = g \cdot f(y) = (f \circ \theta_2)(g, a, y).$$

On applique le lemme 3.4 à $\theta_1, \theta_2 : G \times F \times Y \to Y$ et on obtient (2).

Pour le F-torseur $p_2^*([Y]) = (G \times Y \to G \times X)$, l'énoncé (2) montre que l'action $G \times Y \to Y$ est un F-morphisme compatible avec ρ. Ceci induit un isomorphisme de F-torseurs $p_2^*([Y]) = \rho^*([Y])$ et on a (a).

Puisque l'énoncé (b) est un énoncé sur $\bar{k}$, on obtient (3). □

Corollaire 3.5. *Soient G un groupe algébrique connexe et (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. Alors ρ induit un homomorphisme $\rho_{\pi_1} : \pi_1(G_{\bar{k}}) \to \pi_1(X)$ et, pour tout k-groupe fini F, il induit $\rho^*_{\pi_1} : H^1(X, F) \to H^1(G_{\bar{k}}, F)$ et on a :*

(1) *le sous-groupe $\mathrm{Im}(\rho_{\pi_1}) \subset \pi_1(X)$ est normal et il est contenu dans le centre de $\pi_1(X_{\bar{k}})$;*

(2) *pour tout $\alpha \in H^1(X, F)$, on a $\rho^*_{\pi_1}(\alpha) = \iota(\rho^*(\alpha))$, où ι est dans (3-1) ;*

(3) *pour tout 1-cocycle a de $\pi_1(X)$ à valeurs dans $F(\bar{k})$, l'homomorphisme $a \circ \rho_{\pi_1} : \pi_1(G_{\bar{k}}) \to F(\bar{k})$ est de noyau Γ_k-invariant, et il est nul si et seulement si $\rho^*_{\pi_1}([a]) = 0$;*

(4) *si X est un G-espace homogène à stabilisateur géométrique connexe, alors tout F-torseur G-compatible est constant, i.e., ce torseur est isomorphe à $M \times_k X$ avec M un F-torseur sur k.*

Démonstration. L'énoncé (1) vaut car

$$\pi_1(G_{\bar{k}}) = \mathrm{Ker}\big(\pi_1(G \times X) \xrightarrow{p_{2,*}} \pi_1(X)\big) \quad \text{et} \quad \pi_1((G \times X)_{\bar{k}}) \cong \pi_1(G_{\bar{k}}) \times \pi_1(X_{\bar{k}}).$$

Les énoncés (2) et (3) découlent par définition.

Pour (4), dans ce cas, $\mathrm{Im}(\rho_{\pi_1}) = \pi_1(X_{\bar{k}})$ [Szamuely 2009, Proposition 5.5.4]. D'après la proposition 3.3 et (2), (3) ci-dessus, tout F-torseur G-compatible est trivial sur $X_{\bar{k}}$, et donc il provient d'un F-torseur sur k. □

Corollaire 3.6. *Sous les notations et les hypothèses ci-dessus, supposons que f est G-compatible. Alors, pour tout k-schéma fini étale E, la restriction de Weil $V := R_{X \times E/X}(Y \times E)$ est un $R_{E/k}(F \times_k E)$-torseur G-compatible sur X.*

Démonstration. Notons $f_V : V \to X$. Par hypothèse, f_V est un torseur sous le groupe

$$R_{X \times E/X}(F \times X \times E) \cong R_{E/k}(F \times_k E).$$

On considère $G \times V$ comme un X-schéma par le morphisme $G \times V \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times f_V} G \times X \xrightarrow{\rho} X$ et $G \times Y$ comme un X-schéma par $\rho \circ (\mathrm{id}_G \times f)$. Dans ce cas, tout morphisme $\rho_V \in \mathrm{Mor}_X(G \times V, V)$ satisfait $f_V \circ \rho_V = \rho \circ (\mathrm{id}_G \times f_V)$. D'après la proposition 3.3(d), il suffit de trouver un $\rho_V \in \mathrm{Mor}_X(G \times V, V)$ tel que $\rho_V|_{e_G \times V} = \mathrm{id}_V$. Puisque

$$\mathrm{Mor}_X(V, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_{X \times E}(V \times E, Y \times E) \quad \text{et que} \quad \mathrm{Mor}_X(G \times V, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_{X \times E}(G \times V \times E, Y \times E),$$

l'identité id_V induit un morphisme $V \times E \xrightarrow{\theta} Y \times E$. Le $X \times E$-morphisme

$$G \times V \times E \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times \theta} G \times Y \times E \xrightarrow{\rho_Y \times \mathrm{id}_E} Y \times E$$

induit un morphisme $\rho_V \in \mathrm{Mor}_X(G \times V, V)$ qui satisfait $\rho_V|_{e_G \times V} = \mathrm{id}_V$. □

Corollaire 3.7. *Soient G un groupe algébrique connexe, Z une variété lisse géométriquement intègre et $p : X \to Z$ un G-torseur. Pour tout k-groupe fini F et tout F-torseur G-compatible $Y \to X$, il existe un F-torseur Y_Z sur Z tel que $[Y] = p^*([Y_Z]) \in H^1(X, F)$.*

Démonstration. D'après la proposition 3.3(2), Y est un $G\times F$-torseur sur Z tel que $Y/F = X$. Alors $Y_Z := Y/G$ est un F-torseur sur Z et $Y \to Y_Z$ est un F-morphisme. Donc $[Y] = p^*([Y_Z])$. □

3C. *Le groupe minimal compatible avec un torseur.* Soit G un groupe algébrique connexe. Soit $\mathcal{C}_G$ la catégorie des groupes algébriques connexes H isogènes à G, i.e., munis d'un homomorphisme fini surjectif $\psi : H \to G$. C'est clair que si G est linéaire, tout objet dans $\mathcal{C}_G$ est aussi linéaire.

Soit (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. Soient F un k-groupe fini et $f : Y \to X$ un F-torseur. Soit $\mathcal{C}_G(Y)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_G$ dont les objets sont les groupes H isogènes à G tels que f soit H-compatible. D'après la proposition 3.3(1), tout objet $H \in \mathcal{C}_G(Y)$ admet une unique action sur Y telle que f soit un H-morphisme. Alors tout morphisme de $\mathcal{C}_G(Y)$ est compatible avec les actions ci-dessus.

Proposition 3.8. *La catégorie $\mathcal{C}_G(Y)$ admet un objet final $(H_Y \xrightarrow{\psi_Y} G)$, et un objet $(H \xrightarrow{\psi} G) \in \mathcal{C}_G(Y)$ est final si et seulement si l'action de* $\ker(\psi)$ *sur Y est libre.*

Démonstration. Dans la suite exacte (3-1), notons $\alpha := \iota(\rho^*([Y])) \in H^1(G_{\bar{k}}, F)^{\pi_1(X)}$. Soit

$$\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(G_{\bar{k}}), F(\bar{k}))$$

un élément correspondant à α selon (1-5). D'après le corollaire 3.5(3), le noyau $\mathrm{Ker}(\theta)$ est Γ_k-invariant.

La fonctorialité de (3-1) et la proposition 3.3 montrent qu'un objet $(H \xrightarrow{\psi} G) \in \mathcal{C}_G$ est contenu dans $\mathcal{C}_G(Y)$ si et seulement si $\psi_*(\alpha) = 0 \in H^1(H_{\bar{k}}, F)$, i.e., $\theta \circ \psi_{\pi_1} = 0$ (corollaire 3.5(3)), où $\psi_{\pi_1} : \pi_1(H_{\bar{k}}) \to \pi_1(G_{\bar{k}})$. Puisque $\pi_1(G_{\bar{k}})$ est abélien [Miyanishi 1972, Theorem 1], le corollaire 3.2 implique l'existence de l'objet final de $\mathcal{C}_G(Y)$.

L'argument ci-dessus montre que la catégorie $\mathcal{C}_G(Y)$ est stable par changement de base, i.e., pour toute G-variété X' et tout G-morphisme $X' \to X$, on a un F-torseur $Y' := Y \times_X X' \to X'$ et $\mathcal{C}_G(Y') = \mathcal{C}_G(Y)$ comme sous-catégories de $\mathcal{C}_G$.

Soit $(H_Y \xrightarrow{\psi_Y} G)$ l'objet final de $\mathcal{C}_G(Y)$. Il est l'objet final de $\mathcal{C}_G(Y')$ aussi pour tout $Y' \to X'$ ci-dessus.

Pour montrer que l'action de $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$ est libre, on peut supposer que $k = \bar{k}$ et que X est un espace homogène de G. Dans ce cas, Y est un espace homogène de $F \times H_Y$ (proposition 3.3(2)). Puisque $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$ est dans le centre de $F \times H_Y$, les stabilisateurs de $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$ en tous les points $x \in X$ sont les mêmes. La propriété de l'objet final implique que l'action de $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$ soit libre.

Soit $(H \xrightarrow{\psi} G) \in \mathcal{C}_G(Y)$ un objet tel que l'action de $\ker(\psi)$ sur Y est libre. Soit $\phi : H \to H_Y$ l'homomorphisme canonique. Puisque ψ_Y, ψ sont finis surjectifs et que H_Y est connexe, l'homomorphisme ϕ est fini surjectif. La proposition 3.3(1) implique que ϕ est compatible avec l'action de H et de H_Y. Puisque l'action de $\mathrm{Ker}(\psi)$ sur Y est libre, ϕ est un isomorphisme. □

Définition 3.9. L'objet final $(H_Y \xrightarrow{\psi_Y} G)$ de $\mathcal{C}_G(Y)$ est appelé *le groupe minimal compatible avec le F-torseur Y.*

Remarque 3.10. Soit $\rho_{\pi_1} : \pi_1(G_{\bar{k}}) \to \pi_1(X)$ l'homomorphisme dans le corollaire 3.5 et soit α un 1-cocycle de $\pi_1(X)$ en $F(\bar{k})$ qui correspond à $[Y] \in H^1(X, F)$. Alors $\alpha|_{\pi_1(X_{\bar{k}})}$ est un homomorphisme.

Par la démonstration de la proposition 3.8, le groupe minimal compatible au F-torseur Y est déterminé par $\mathrm{Ker}(\alpha \circ \rho_{\pi_1})$, où $\alpha \circ \rho_{\pi_1} : \pi_1(G_{\bar{k}}) \to F(\bar{k})$ est un homomorphisme. Donc ceci est déterminé par $\mathrm{Ker}(\alpha|_{\mathrm{Im}(\rho_{\pi_1})})$.

D'après la proposition 3.3(3), H_Y est aussi le groupe minimal compatible au F_σ-torseur Y_σ pour tout $\sigma \in H^1(k, F)$.

Corollaire 3.11. *Sous les notations et les hypothèses ci-dessus, si Y est géométriquement intègre sur k, alors il existe un homomorphisme injectif $\phi : \mathrm{Ker}(\psi_Y) \to F$ d'image centrale compatible avec l'action de $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$ et de F sur Y.*

Démonstration. L'action de $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$ induit un morphisme :

$$\Phi : \mathrm{Ker}(\psi_Y) \times Y \xrightarrow{\rho_{H_Y}, \mathrm{pr}_Y} Y \times_X Y \xrightarrow{\sim} F \times_k Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_F} F,$$

où ρ_{H_Y} est l'action de H_Y. Pour tous $h \in \mathrm{Ker}(\psi_Y)$, $y \in Y$, on a $h \cdot y = \Phi(h, y) \cdot y$.

Puisque Y est géométriquement intègre, il existe un morphisme $\phi : \mathrm{Ker}(\psi_Y) \to F$ tel que $\Phi = \phi \circ p_1$, où $p_1 : \mathrm{Ker}(\psi_Y) \times Y \to \mathrm{Ker}(\psi_Y)$ est la projection. Puisque l'action de F sur Y est libre, ϕ est un homomorphisme. La proposition 3.3(2) implique que l'image de ϕ est centrale. D'après la proposition 3.8, l'action de $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$ est libre et donc ϕ est injectif. □

Rappelons la définition de $\mathrm{Br}_G(X)$ dans la définition 1.3.

Proposition 3.12. *Soient G un groupe algébrique connexe et X une G-variété lisse géométriquement intègre. Supposons qu'il existe un torseur universel de n-torsion $\mathcal{T}_X \xrightarrow{f} X$ sous le groupe S_X. Soit $H \xrightarrow{\psi} G$ le groupe minimal compatible au S_X-torseur $\mathcal{T}_X$. Alors, pour tout élément de n-torsion $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ et tout $\sigma \in H^1(k, S_X)$, on a $f_\sigma^*(\alpha) \in \mathrm{Br}_H(\mathcal{T}_{X,\sigma})$, où $f_\sigma^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\mathcal{T}_{X,\sigma})$ est l'homomorphisme induit par $f_\sigma : \mathcal{T}_{X,\sigma} \to X$.*

Démonstration. On peut supposer que $\sigma = 0 \in H^1(k, S_X)$.

Notons $\rho_H : H \times \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_X$ l'action de H et $p_{1,H} : H \times \mathcal{T}_X \to H$, $p_{2,H} : H \times \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_X$ les deux projections. Soit $\mathcal{T}_G$ un torseur universel de n-torsion pour G sous le groupe S_G.

Appliquant le corollaire 2.7 à (G, X), on obtient : pour tout $\alpha_1 \in H^2(X, \mu_n)$, il existe un $\phi \in \mathrm{Hom}(S_G, S_X^*)$ et un $\beta \in H^2(G, \mu_n)$ tels que $(\rho^* - p_2^*)(\alpha_1) = \varepsilon(\phi) + p_1^*(\beta)$.

Puisque $f^*([\mathcal{T}_X]) = 0 \in H^1(\mathcal{T}_X, S_X)$, on a

$$(\psi \times f)^*(\varepsilon(\phi)) = (\psi \times f)^*(\phi_*([\mathcal{T}_G]) \cup [\mathcal{T}_X]) = \phi_*(\psi^*([\mathcal{T}_G])) \cup f^*([\mathcal{T}_X]) = 0.$$

Alors $(\rho_H^* - p_{2,H}^*)(f^*(\alpha_1)) = (\psi \times f)^*((\rho^* - p_2^*)(\alpha_1)) = (\psi \times f)^*(p_1^*(\beta)) = p_{1,H}^*(\psi^*(\beta))$.

D'après la suite exacte de Kummer, $(\rho_H^* - p_{2,H}^*)(f^*(\alpha)) \subset p_{1,H}^*\mathrm{Br}(H)$, d'où le résultat. □

4. Rappel sur le sous-groupe de Brauer invariant

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété.

Dans cette section, on rappelle des notions et des résultats dans [Cao 2018, §3] sur le sous-groupe de Brauer invariant.

Pour la définition du sous-groupe de Brauer invariant on renvoie le lecteur à la définition 1.3.

Soit **AB** la catégorie des groupes abéliens. Soit **GX** la catégorie des couples (G, X) avec G un groupe algébrique connexe et X une G-variété lisse, et un morphisme $(H, Y) \to (G, X)$ dans **GX** est un couple (ψ, f) avec $\psi : H \to G$ un homomorphisme et $f : Y \to X$ un H-morphisme, où l'action de H sur X est induite par ψ. Par définition,

$$\mathrm{Br}_{-}(-) : \mathbf{GX} \to \mathbf{AB} : (G, X) \mapsto \mathrm{Br}_G(X)$$

est un foncteur contravariant.

Exemple 4.1. (1) [Cao 2018, lemme 3.6] Soit G un groupe linéaire connexe. Alors $\mathrm{Br}_G(G) = \mathrm{Br}_1(G)$.

(2) [Cao 2018, proposition 3.9(3)] Soient G un groupe linéaire connexe, $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe et $X := G/G_0$. Alors

$$\mathrm{Br}_G(X) = \mathrm{Br}_1(X, G) := \ker(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(G_{\bar{k}})).$$

Le groupe $\mathrm{Br}_1(X, G)$ est défini par Borovoi et Demarche [2013] pour étudier l'approximation forte de X.

(3) Soit A une variété abélienne. L'auteur ne sait pas identifier le groupe $\mathrm{Br}_A(A)$. Par exemple, l'auteur ne sait pas si $\mathrm{Br}_A(A) \subset \mathrm{Br}_1(A)$ ou si $\mathrm{Br}_A(A) \supset \mathrm{Br}_1(A)$.

Au vu de l'exemple 4.1(3), dans la suite du présent article, on suppose que G est un groupe linéaire.

Soient G un groupe linéaire connexe et X une G-variété lisse géométriquement intègre. Notons $\rho : G \times X \to X$ l'action et $p_1 : G \times X \to G$, $p_2 : G \times X \to X$ les deux projections.

(1) Puisque $\mathrm{Br}_1(G \times X) \cong \mathrm{Br}_e(G) \oplus \mathrm{Br}_1(X)$ [Sansuc 1981, lemme 6.6], on peut obtenir facilement [Cao 2018, proposition 3.2(4)] :

$$\mathrm{Br}_1(X) \subset \mathrm{Br}_G(X). \tag{4-1}$$

(2) Puisque $p_1^*|_{\mathrm{Br}_e(G)} : \mathrm{Br}_e(G) \to \mathrm{Br}(G \times X)$ est injectif, par la définition de $\mathrm{Br}_G(X)$, il existe un unique homomorphisme $\mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_e(G)$ tel que [Cao 2018, (3.4)]

$$p_1^* \circ \lambda = \rho^* - p_2^* : \mathrm{Br}_G(X) \to \mathrm{Br}(G \times X).$$

Le $\lambda : \mathrm{Br}_G(X) \to \mathrm{Br}_e(G)$ est appelé *l'homomorphisme de Sansuc* [Cao 2018, définition 3.8].

(3) Pour toute extension de corps K/k, et tous $x \in X(K)$, $g \in G(K)$, $\alpha \in \mathrm{Br}_G(X)$, on a [Cao 2018, proposition 3.9(1)] :

$$(g \cdot x)^*(\alpha) = g^*(\lambda(\alpha)) + x^*(\alpha) \in \mathrm{Br}(K).$$

Alors, dans le cas où k est un corps de nombres, on a :

$$G(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_a(G)} \cdot X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)}. \tag{4-2}$$

La formule (4-1) et [Harari et Skorobogatov 2013, Corollary 3.6] impliquent directement :

Corollaire 4.2. *Soit $(G, X) \in \mathbf{GX}$ un objet. Si $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)} \neq \varnothing$, alors, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un torseur universel de n-torsion pour X.*

Pour un torseur sous un groupe linéaire connexe, Sansuc a construit une suite exacte dans [Sansuc 1981, proposition 6.10], qui est appelée *la suite exacte de Sansuc*. La proposition suivante dit que les sous-groupes de Brauer invariant sont compatibles avec la suite exacte de Sansuc.

Proposition 4.3 [Cao 2018, corollaire 3.11(2)]. *Soit $1 \to N \to H \xrightarrow{\psi} G \to 1$ une suite exacte de groupes linéaires connexes. Soit $(\psi, f) : (H, Y) \to (G, X)$ un morphisme dans $\mathbf{GX}$ tel que X soit géométriquement intègre sur k et $Y \to X$ soit un N-torseur, où l'action de N sur Y est induite par celle de H. Alors $f^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y)$ satisfait $(f^*)^{-1}\mathrm{Br}_H(Y) = \mathrm{Br}_G(X)$ et on a une suite exacte, fonctorielle en (X, Y, f, N) :*

$$\mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(N) \to \mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Br}_H(Y) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_e(N),$$

où $\lambda : \mathrm{Br}_H(Y) \subset \mathrm{Br}_N(Y) \to \mathrm{Br}_e(N)$ est l'homomorphisme de Sansuc.

Pour une fibration $f : X \to T$ et tout $t \in T(k)$, on note $i_t : X_t \subset X$ la fibre et on a la spécialisation du groupe de Brauer $i_t^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_t)$. La proposition suivante dit que, si la fibration f est compatible avec des actions des groupes linéaires, alors les sous-groupes de Brauer invariants sont compatibles avec la spécialisation du groupe de Brauer.

Proposition 4.4 [Cao 2018, proposition 3.13]. *Soit $1 \to G_0 \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} T \to 1$ une suite exacte de groupes linéaires connexes avec T un tore. Soient X une G-variété lisse géométriquement intègre et $X \xrightarrow{f} T$ un G-morphisme. Notons $\mathrm{Br}_1(G) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Br}_1(G_0)$ l'homomorphisme induit par ϕ. Alors, pour tout $t \in T(k)$, on a*

(1) *la fibre $i_t : X_t \subset X$ est G_0-invariante ;*

(2) *on a une suite exacte naturelle*

$$\mathrm{Br}_e(T) \to \mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{i_t^*} \mathrm{Br}_{G_0}(X_t) \to \mathrm{coker}(\phi_*);$$

(3) [Cao 2018, lemme 5.5] *si k est un corps de nombres et $H^3(k, T^*) = 0$, on a $\mathrm{coker}(\phi_*) = 0$ et i_t^* est surjectif.*

5. La descente par rapport au sous-groupe de Brauer invariant

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété.

La méthode de descente des points adéliques est établie par Colliot-Thélène et Sansuc [1987a]. Dans [Cao 2018], l'auteur étudie la méthode de descente des points adéliques orthogonaux aux sous-groupes de Brauer invariants et établit le résultat : pour un groupe linéaire connexe G, une variété lisse géométriquement intègre Z et un G-torseur $p : X \to Z$,

(1) on a [Cao 2018, théorème 5.9] :

$$Z(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}(Z)} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k,G)} p_\sigma\big(X_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(X_\sigma)}\big); \tag{5-1}$$

(2) si G est un tore quasi-trivial, on a [Cao 2018, proposition 5.2]

$$Z(\boldsymbol{A}_k)^{(p^*)^{-1}B} = p(X(\boldsymbol{A}_k)^B), \tag{5-2}$$

pour tout sous-groupe $B \subset \mathrm{Br}_G(X)$, où $p^* : \mathrm{Br}(Z) \to \mathrm{Br}(X)$;

(3) pour tout homomorphisme surjectif $\psi : H \to G$ de groupes linéaires connexes, on a [Cao et al. 2019b, Theorem 5.1] :

$$G(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G)} = \psi(H(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(H)}) \cdot G(k). \tag{5-3}$$

La proposition 5.1 et la proposition 5.5 suivantes sont quelques variantes de ce résultat. Plus précisément, la proposition 5.1 est une variante de (2) pour G un groupe fini commutatif et sa démonstration utilise (2) et (3) mais pas (1). La proposition 5.5 est une variante de (1) en remplaçant “Br” par “ét, Br” et en remplaçant “Br_G” par “G-ét, Br_G”, donc elle est une version limite de (1) pour tout k-torseur $Z' \to Z$ sous un k-groupe fini, et sa démonstration utilise (1) mais pas (2) et (3).

Proposition 5.1. *Soient G, H deux groupes linéaires connexes et $\psi : H \to G$ un homomorphisme surjectif de noyau S fini. Soient X* (resp. Y) *une G-variété* (resp. H-variété) *lisse géométriquement intègre et $f : Y \to X$ un H-morphisme tels que Y soit un S-torseur sur X, où l'action de S est induite par l'action de H. Alors, pour tout $\sigma \in H^1(k, S)$, le tordu Y_σ est une H-variété et on a :*

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k,S)} f_\sigma\big(Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_H(Y_\sigma)}\big).$$

Démonstration. On construira les diagrammes ci-dessous

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & T_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ & H \arrow[r] \arrow[dr, "\psi"'] & H_0 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_0"] & T & \\ & & G & & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y_0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_0"] & T \\ & X & \end{tikzcd}$$

où le diagramme à gauche est un diagramme de groupes algébriques, le diagramme à droite est un diagramme de variétés lisses, chaque groupe dans le diagramme à gauche agit sur la variété dans le diagramme à droite avec le même position et ces actions sont compatibles avec tous les morphismes.

Puisque H est connexe, S est contenu dans le centre de H. Donc S est commutatif. Une résolution coflasque [Colliot-Thélène et Sansuc 1987b, Proposition 1.3] induit une suite exacte

$$0 \to S \to T_0 \xrightarrow{\varphi} T \to 0 \tag{5-4}$$

où T_0 est un tore quasi-trivial et T est un tore coflasque, i.e., $H^1(k', T^*) = 0$ pour toute extension k'/k. Puisque $H^3(k, T^*) \cong \prod_{v\in\infty_k} H^3(k_v, T^*) \cong \prod_{v\in\infty_k} H^1(k_v, T^*)$ [Cao 2018, lemme 5.4], on a $H^3(k, T^*) = 0$.

Soit $H_0 := H \times^S T_0$. Alors H_0 est un groupe linéaire connexe et $H \xrightarrow{\psi} G$ induit une suite exacte

$$1 \to T_0 \to H_0 \xrightarrow{\psi_0} G \to 1.$$

Soit $Y_0 := Y \times^S T_0$. Notons $i : Y \to Y_0$ l'immersion fermée canonique. Alors Y_0 est une H_0-variété et f induit un H_0-morphisme $Y_0 \xrightarrow{f_0} X$ tels que f_0 est un T_0-torseur. D'après (5-2) et la proposition 4.3, on a

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)} = f_0(Y_0(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_0}(Y_0)}).$$

L'isomorphisme $Y_0 \times^{T_0} T \cong Y \times^S T_0 \times^{T_0} T \cong X \times T$ induit un T_0-morphisme $\phi : Y_0 \to T$ tel que $\phi^{-1}(e_T) = i(Y)$. D'après des arguments classiques (voir la démonstration de [Cao 2018, théorème 5.9]), pour tout $t \in T(k)$, on a $\phi^{-1}(t) \cong Y_{\partial(t)}$ et le morphisme $\phi^{-1}(t) \hookrightarrow Y_0 \xrightarrow{f_0} X$ est exactement $f_{\partial(t)}$, où $\partial : T(k) \to H^1(k, S)$ est l'homomorphisme induit par (5-4). Puisque $H^3(k, T^*) = 0$, d'après la proposition 4.4, $\phi^{-1}(t)$ est une H-variété et l'homomorphisme canonique $\mathrm{Br}_{H_0}(Y_0) \to \mathrm{Br}_H(\phi^{-1}(t))$ est surjectif pour tout $t \in T(k)$.

D'après (4-2), $Y_0(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_0}(Y_0)}$ est $T_0(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(T_0)}$-invariant. On applique (5-3) à φ et on a

$$T(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(T)} = \varphi(T_0(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(T_0)}) \cdot T(k).$$

Puisque $\phi(Y_0(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_0}(Y_0)}) \subset T(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(T)}$, on a :

$$Y_0(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_0}(Y_0)} = T_0(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(T_0)} \cdot \Big(\bigsqcup_{t\in T(k)} \phi^{-1}(t)(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_H(\phi^{-1}(t))}\Big),$$

et donc

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)} = f_0\Big[\bigsqcup_{t\in T(k)} \phi^{-1}(t)(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_H(\phi^{-1}(t))}\Big] = \bigcup_{t\in T(k)} f_{\partial(t)}[Y_{\partial(t)}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_H(Y_{\partial(t)})}]. \qquad \square$$

Rappelons la définition de $X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét},\,\mathrm{Br}_G}$ dans (1-4).

Pour toute variété lisse X, définissons $X(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})$ l'espace des points adéliques de X hors des places complexes, i.e., on a $X(\boldsymbol{A}_k) \cong \big(\prod_{v \text{ complexe}} X(k_v)\big) \times X(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})$. De plus, on a :

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{ob}} \cong \Big(\prod_{v \text{ complexe}} X(k_v)\Big) \times X(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{\mathrm{ob}} \tag{5-5}$$

pour l'obstruction $\mathrm{ob} = \mathrm{Br}(X)$ ou $\mathrm{ob} = \mathrm{Br}_1(X)$ ou $\mathrm{ob} =$ ét, Br ou, si X est une G-variété pour un groupe linéaire connexe G, pour $\mathrm{ob} = \mathrm{Br}_G(X)$ ou $\mathrm{ob} = G$-ét, Br_G.

Le lemme suivant est bien connu (voir [Demarche 2009a, lemme 2.2.8] pour une variante).

Lemme 5.2. *Soient X une variété lisse et $\{X_i\}_{i\in I}$ les composantes connexes de X telles que X_i soit géométriquement intègre pour tout $i \in I$. Alors on a :*

$$X(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{\mathrm{Br}_1(X)} = \coprod_{i\in I} X_i(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{\mathrm{Br}_1(X_i)}, \quad X(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{\text{ét, Br}} = \coprod_{i\in I} X_i(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{\text{ét, Br}}$$

et, si X est une G-variété pour un groupe linéaire connexe G, on a :

$$X(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{\mathrm{Br}_G(X)} = \coprod_{i\in I} X_i(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{\mathrm{Br}_G(X_i)} \quad et \quad X(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{G\text{-ét, Br}_G} = \coprod_{i\in I} X_i(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{G\text{-ét, Br}_G}.$$

Démonstration. Puisque le groupe de Brauer (resp. le sous-groupe de Brauer G-invariant, resp. l'ensemble des F-torseurs, resp. l'ensemble des F-torseurs G-compatibles pour un k-groupe fini F) de X est la somme directe de celui des composantes connexes de X, on obtient l'inclusion $\supset$ dans les quatre cas ci-dessus.

Par ailleurs, soit $\pi_0(X)$ le schéma des composantes connexes géométriques de X, i.e., $\pi_0(X)$ est un k-schéma fini étale et il existe un k-morphisme surjectif $\phi : X \to \pi_0(X)$ de fibres géométriquement intègres. Pour tout k-schéma V fini étale connexe, $V(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}}) \neq \varnothing$ implique $V \cong \operatorname{Spec} k$. D'après [Liu et Xu 2015, Proposition 3.3] (un résultat inspiré par Stoll), on a $\pi_0(X)(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{nc}})^{\mathrm{Br}(\pi_0(X))} = \pi_0(X)(k)$. Par définition, $\phi^*(\mathrm{Br}(\pi_0(X))) \subset \mathrm{Br}_1(X)$, $\phi^*(\mathrm{Br}(\pi_0(X))) \subset \mathrm{Br}_G(X)$ et donc on obtient l'inclusion $\subset$. □

Les deux lemmes suivants sont bien connus.

Lemme 5.3. *Soient X une variété lisse, L un groupe linéaire quelconque et $h : V \to X$ un L-torseur. Alors, pour tout $x \in X(\boldsymbol{A}_k)$, l'ensemble $\{\sigma \in H^1(k, L) : x \in h_\sigma(V_\sigma(\boldsymbol{A}_k))\}$ est fini.*

Démonstration. Le résultat découle du fait que, pour tout $\sigma \in H^1(k, L)$, l'ensemble $Ш^1(k, L_\sigma)$ est fini [Serre 1964, §III.4.6]. □

Voir [Skorobogatov 2001, Proposition 5.3.2 ; Cao et al. 2019a, Lemma 6.3] pour des résultats similaires.

Lemme 5.4 (M. Stoll [2007], cf. [Cao et al. 2019a, Lemma 7.1]). *Soit X une variété lisse géométriquement intègre, F un k-groupe fini et $f : Y \to X$ un F-torseur. Supposons qu'il existe un $x \in X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}}$. Alors il existe un $\sigma \in H^1(k, F)$, un sous-groupe fermé $F' \subset F_\sigma$, une composante connexe $Y' \subset Y_\sigma$ tels que Y' soit géométriquement intègre et F'-invariant, $f' := f_\sigma|_{Y'} : Y' \to X$ soit un F'-torseur et que $x \in f'(Y'(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}(Y')})$.*

La proposition suivante est une étape intermédiaire importante dans la démonstration du théorème 1.1.

Proposition 5.5. *Soient G un groupe linéaire connexe, Z une variété lisse géométriquement intègre et $p : X \to Z$ un G-torseur. Alors :*

$$Z(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}} = \bigcup_{\sigma\in H^1(k,G)} p_\sigma(X_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{G_\sigma\text{-ét, Br}_{G_\sigma}}).$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ découle du fait que, pour tout torseur $V \to Z$ sous un k-groupe fini, l'image réciproque $X \times_Z V \to X$ est G-compatible.

Pour l'inclusion $\subset$, on peut supposer que $Z(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}} \neq \varnothing$.

On fixe un point $z \in Z(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}}$.

Soit Δ l'ensemble des $\sigma \in H^1(k, G)$ tels que $p_\sigma^{-1}(z) \cap X_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(X_\sigma)} \neq \varnothing$. Alors $\Delta \neq \varnothing$ par (5-1). Pour tout $\sigma \in \Delta$, on fixe un point $x_\sigma \in p_\sigma^{-1}(z) \cap X_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(X_\sigma)}$. Ceci induit un isomorphisme :

$$\Psi_\sigma : G(\boldsymbol{A}_k) \to p_\sigma^{-1}(z)(\boldsymbol{A}_k) : g \mapsto g \cdot x_\sigma .$$

Notons :

$$E_{0,\sigma} := \Psi_\sigma^{-1}\big(p_\sigma^{-1}(z) \cap X_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(X_\sigma)}\big) \quad \text{et} \quad E_0 := \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} E_{0,\sigma} .$$

Pour tout $\sigma \in \Delta$, soit $G_\sigma(\boldsymbol{A}_k) \xrightarrow{a_\sigma} \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Br}_a(G_\sigma), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$ l'homomorphisme induit par l'accouplement de Brauer–Manin. Donc $\mathrm{Ker}(a_\sigma) = G_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_a(G_\sigma)}$. Notons

$$K_{a,\Delta} := \prod_{\sigma \in \Delta} \mathrm{Ker}(a_\sigma) \quad \text{et} \quad G_\Delta(\boldsymbol{A}_k) := \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} G_\sigma(\boldsymbol{A}_k).$$

Définissons l'action de $\mathrm{Ker}(a_\sigma)$ sur $G_\sigma(\boldsymbol{A}_k)$ par la multiplication à gauche. Ceci induit une unique action de $K_{a,\Delta}$ sur $G_\Delta(\boldsymbol{A}_k)$ telle que l'action de $\mathrm{Ker}(\sigma_1)$ sur $G_{\sigma_2}(\boldsymbol{A}_k)$ soit l'identité pour tous $\sigma_1 \neq \sigma_2$. D'après (4-2), E_0 est $K_{a,\Delta}$-invariant.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(F, V \xrightarrow{f} Z)$ avec F un k-groupe fini et $V \xrightarrow{f} Z$ un F-torseur tel que V soit géométriquement intègre. On définit un ordre partiel : pour tous $(F_1, V_1), (F_2, V_2) \in \mathcal{S}$, on a $(F_1, V_1) \leq (F_2, V_2)$ si et seulement s'il existe un $\sigma \in H^1(k, F_1)$ et un homomorphisme surjectif $\phi : F_2 \to F_{1,\sigma}$ tels que $\phi_*([V_2]) = [V_{1,\sigma}]$.

Pour tout $(\delta, \sigma) \in H^1(k, F) \times H^1(k, G)$, soit $Y_{\sigma,\delta} := X_\sigma \times_Z V_\delta$. On a un diagramme commutatif de $F_\delta \times G_\sigma$-variétés et de $F_\delta \times G_\sigma$-morphismes :

$$\begin{tikzcd} Y_{\sigma,\delta} \arrow[r, "f_\delta^\sigma"] \arrow[d, "p_\sigma^\delta"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\sigma \arrow[d, "p_\sigma"] \\ V_\delta \arrow[r, "f_\delta"] & Z, \end{tikzcd}$$

tel que toute verticale soit un G_σ-torseur et que toute horizontale soit un F_δ-torseur.

Pour tout $(F, V \xrightarrow{f} Z) \in \mathcal{S}$ et tout $\sigma \in \Delta$, notons

$$E_{F,V,\sigma} := \Psi_\sigma^{-1}\left(p_\sigma^{-1}(z) \cap \left[\bigcup_{\delta \in H^1(k,F)} f_\delta^\sigma\big(Y_{\sigma,\delta}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_{\sigma,\delta})}\big)\right]\right) \subset G_\sigma(\boldsymbol{A}_k) \tag{5-6}$$

et $E_{F,V} := \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} E_{F,V,\sigma} \subset G_\Delta(\boldsymbol{A}_k)$.

Lemme 5.6. *Pour tout $(F, V \xrightarrow{f} Z) \in \mathcal{S}$, on a :*

(1) *l'ensemble $E_{F,V}$ est un sous-ensemble non vide fermé $K_{a,\Delta}$-invariant de E_0 ;*

(2) *pour tout $(F_1, V_1) \in \mathcal{S}$ vérifiant $(F, V) \leq (F_1, V_1)$, on a $E_{F_1,V_1} \subset E_{F,V}$;*

(3) *l'ensemble $\mathcal{S}$ est un ensemble ordonné filtrant.*

Démonstration. Pour tout $\delta \in H^1(k, F)$ et tout $\sigma \in H^1(k, G)$, le morphisme f_δ^σ est fini. D'après (4-2), $Y_{\sigma,\delta}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_{\sigma,\delta})}$ est $\mathrm{Ker}(a_\sigma)$-invariant et

$$f_\delta^\sigma(Y_{\sigma,\delta}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_{\sigma,\delta})}) \subset X_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(X_\sigma)}$$

est fermé [Conrad 2012, Proposition 4.4] et $\mathrm{Ker}(a_\sigma)$-invariant. Ainsi

$$\Psi_\sigma^{-1}\big[p_\sigma^{-1}(z) \cap f_\delta^\sigma(Y_{\sigma,\delta}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_{\sigma,\delta})})\big] \subset E_{0,\sigma}$$

est fermé et $\mathrm{Ker}(a_\sigma)$-invariant.

Appliquant (5-1) et le lemme 5.3 à $Y_{\sigma,\delta} \xrightarrow{p_\sigma^\delta} V_\delta$, il existe au moins un et au plus un nombre fini de $(\delta, \sigma) \in H^1(k, F) \times H^1(k, G)$ tels que

$$(f_\delta \circ p_\sigma^\delta)^{-1}(z) \cap Y_{\sigma,\delta}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_{\sigma,\delta})} \neq \varnothing.$$

Alors $p_\sigma^{-1}(z) \cap X_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(X_\sigma)} \neq \varnothing$ et donc un tel σ est dans Δ. Alors $E_{F,V} \neq \varnothing$ et (1) découle du premier paragraphe.

L'énoncé (2) découle de la fonctorialité de l'accouplement de Brauer–Manin.

Pour tous $(F_1, V_1), (F_2, V_2) \in \mathcal{S}$, on a un $F_1 \times F_2$-torseur $V_1 \times_Z V_2 \to Z$. Par hypothèse, il existe un $(\sigma_1, \sigma_2) \in H^1(k, F_1) \times H^1(k, F_2)$ tel que $(V_{1,\sigma_1} \times_Z V_{2,\sigma_2})(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}(V_{1,\sigma_1} \times_Z V_{2,\sigma_2})} \neq \varnothing$. D'après le lemme 5.2 et (5-5), il existe un k-sous-groupe fermé $F_3 \subset F_{1,\sigma_1} \times F_{2,\sigma_2}$ et une composante connexe $V_3 \subset V_{1,\sigma_1} \times_Z V_{2,\sigma_2}$ tels que V_3 soit géométriquement intègre et que $V_3 \to Z$ soit un F_3-torseur compatible avec l'action de $F_{1,\sigma_1} \times F_{2,\sigma_2}$ sur $V_{1,\sigma_1} \times_Z V_{2,\sigma_2}$. Alors le morphisme $h_1 : V_3 \subset V_{1,\sigma_1} \times_Z V_{2,\sigma_2} \to V_{1,\sigma_1}$ est compatible avec $\phi_1 : F_3 \subset F_{1,\sigma_1} \times F_{2,\sigma_2} \to F_{1,\sigma_1}$. Puisque V_{1,σ_1} est géométriquement intègre, le morphisme h_1 est surjectif et donc ϕ_1 est surjectif. Alors $[V_{1,\sigma_1}] = \phi_{1,*}([V_3])$ et $(F_1, V_1) \le (F_3, V_3)$. Par ailleurs, $(F_2, V_2) \le (F_3, V_3)$, d'où l'énoncé (3). □

Soient $\mathcal{B} := \bigsqcup_{\sigma\in\Delta} \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Br}_a(G_\sigma), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$ et

$$a_\Delta : G_\Delta = \bigsqcup_{\sigma\in\Delta} G_\sigma(\boldsymbol{A}_k) \xrightarrow{\bigsqcup_{\sigma\in\Delta} a_\sigma} \bigsqcup_{\sigma\in\Delta} \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Br}_a(G_\sigma), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big) = \mathcal{B}.$$

En tant qu'ensembles, on a $\mathrm{Im}(a_\Delta) \cong K_{a,\Delta} \backslash G_\Delta$. L'espace $\mathrm{Hom}(\mathrm{Br}_a(G_\sigma), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est compact, car $\mathrm{Br}_a(G_\sigma)$ est discret. D'après le lemme 5.3, Δ est fini et donc $\mathcal{B}$ est compact. Puisque a_σ est continu et ouvert [Cao 2018, lemme 4.1], l'application a_Δ est ouverte. Donc l'image d'un sous-ensemble fermé $K_{a,\Delta}$-invariant est fermée. Alors $a_\Delta(E_{F,V}) \subset \mathcal{B}$ est fermé non vide pour tout $(F, V) \in \mathcal{S}$. Puisque $\mathcal{B}$ est compact et que $\mathcal{S}$ est un ensemble ordonné filtrant, d'après le lemme 5.6 (2), l'intersection

$$\bigcap_{(F,V)\in\mathcal{S}} a_\Delta(E_{F,V}) \neq \varnothing \quad \text{et donc} \quad E_\infty := \bigcap_{(F,V)\in\mathcal{S}} E_{F,V} \neq \varnothing.$$

Il existe un $\sigma \in \Delta$ tel que $E_\infty \cap E_\sigma \neq \varnothing$.

Soient $g \in E_\infty \cap E_\sigma$ et $x := \Psi_\sigma(g) = g \cdot x_\sigma$. Alors $p_\sigma(x) = z$ et, d'après (5-6), on a

$$x \in \bigcap_{(F,V)\in\mathcal{S}} \Big[\bigcup_{\delta\in H^1(k,F)} f_\delta^\sigma \big(Y_{\sigma,\delta}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_{\sigma,\delta})}\big)\Big].$$

D'après le corollaire 3.7, tout torseur G-compatible sous un k-groupe fini sur X provient d'un torseur sur Z. D'après le lemme de Stoll (lemme 5.4), il suffit de considérer les torseurs géométriquement intègres. Donc $x \in X_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{G_\sigma\text{-ét},\,\mathrm{Br}_{G_\sigma}}$, d'où le résultat. □

La proposition suivante est une généralisation de [Cao et al. 2019a, Remark 7.5].

Proposition 5.7. *Soit X une variété lisse géométriquement intègre. Soit*

$$1 \to N \to L \xrightarrow{\psi} F \to 1$$

une suite exacte de groupes linéaires avec F fini. Soient $V \to X$ un L-torseur et $Y := V/N \to X$ le F-torseur induit par ψ, i.e., $[Y] = \psi_*([V])$. Faisons l'une ou l'autre des hypothèses :

(1) *Le groupe N est connexe.*

(2) *Le groupe L est fini et N est contenu dans le centre de L.*

Alors, pour tout $\sigma \in H^1(k, F)$ avec $Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(Y_\sigma)} \neq \varnothing$, il existe un $\alpha \in H^1(k, L)$ tel que $\psi_*(\alpha) = \sigma$.

Démonstration. Le cas où N est connexe est exactement [Cao et al. 2019a, Remark 7.5].

On considère le cas (2). Dans ce cas, N est un k-groupe fini commutatif. La résolution flasque [Colliot-Thélène et Sansuc 1987b, Proposition 1.3] donne une suite exacte $0 \to N \to T \to T_0 \to 0$ avec T un tore et T_0 un tore quasi-trivial. Soit $L' := L \times^N T$. Alors L' est un groupe linéaire, car N est contenu dans le centre de L. Ceci induit un diagramme commutatif de suites exactes et de colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"] & F \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d] & L' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d] & F \arrow[r] & 1 \\
 & T_0 \arrow[r, "="] \arrow[d] & T_0 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Appliquons le cas (1) au L'-torseur $\psi_{2,*}([V])$. On obtient un $\beta \in H^1(k, L')$ tel que $\psi_{1,*}(\beta) = \sigma$. Puisque $H^1(k, T_0) = 0$, il existe un $\alpha \in H^1(k, L)$ tel que $\psi_{2,*}(\alpha) = \beta$ et donc $\psi_*(\alpha) = \sigma$. □

La proposition 5.7(2) et la formule (4-1) impliquent directement :

Corollaire 5.8. *Sous les hypothèses de la proposition 5.7(2), soit G un groupe linéaire. Pour tout $\sigma \in H^1(k, F)$, s'il existe une action de G sur Y_σ telle que $Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Y_\sigma)} \neq \varnothing$, alors il existe un $\alpha \in H^1(k, L)$ tel que $\psi_*(\alpha) = \sigma$.*

6. Démonstration du théorème 1.4

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété.

Dans toute cette section, G est un k-groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre.

Pour tout k-groupe fini F et tout F-torseur $f : Y \to X$, soit $(H_Y \xrightarrow{\psi_Y} G)$ le groupe minimal compatible au F-torseur Y (cf. définition 3.9). Pour tout $\sigma \in H^1(k, F)$, le F_σ-torseur $f_\sigma : Y_\sigma \to X$ est H_Y-compatible, i.e., il existe une unique action de H_Y sur Y_σ telle que f_σ soit un H_Y-morphisme.

Dans paragraphe 1, on a défini $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ (cf. (1-1)) et $X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G}$ (cf. (1-4)). On définit

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}_G} := \bigcap_{\substack{f:Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ fini}}} \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_Y}(Y_\sigma)}),$$

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{c.c., ét, Br}_G} := \bigcap_{\substack{f:Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ fini commutatif} \\ Y \text{ géo. connexe}}} \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_Y}(Y_\sigma)}),$$

où géo. connexe signifie géométriquement connexe et c.c. est une abréviation de commutatif connexe. On a directement :

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}_G} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{c.c., ét, Br}_G} \quad \text{et} \quad X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}_G} \subset X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G}.$$

Proposition 6.1. $$X(\mathbf{A}_k)^{\text{c.c., ét, Br}_G} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ et tout $x \in X(\mathbf{A}_k)^{\text{c.c., ét, Br}_G}$, on a $\alpha(x) = 0$. On fixe un tel x et un tel α.

Il existe un entier n tel que $n \cdot \alpha = 0$. D'après le corollaire 4.2, il existe un torseur universel de n-torsion $\mathcal{T}_X \xrightarrow{f} X$ (un S_X-torseur). Soit H le groupe minimal compatible au S_X-torseur $\mathcal{T}_X$. Par hypothèse, il existe un $\sigma \in H^1(k, S_X)$ et un point adélique $t \in \mathcal{T}_{X,\sigma}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_H(\mathcal{T}_{X,\sigma})}$ tels que $f_\sigma(t) = x$. D'après la proposition 3.12, $f_\sigma^*(\alpha) \in \mathrm{Br}_H(\mathcal{T}_{X,\sigma})$. Alors $\alpha(x) = f_\sigma^*(\alpha)(t) = 0$. □

Le lemme suivant généralise un résultat de Skorobogatov [2009, Theorem 1.1] et il généralise aussi [Cao et al. 2019a, Proposition 6.6]. Sa démonstration suit l'idée de [Skorobogatov 2009, p. 506] et de [Stoll 2007, Proposition 5.17].

Lemme 6.2. *Soient F un k-groupe fini, $f : Y \to X$ un F torseur et $(H_Y \xrightarrow{\psi_Y} G)$ le groupe minimal compatible au F-torseur Y. Supposons que Y est géométriquement intègre. Alors*

(1) *on a $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}_G} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma[Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}_{H_Y}}]$;*

(2) *on a* $X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}} = \bigcup_{\sigma\in H^1(k,F)} f_\sigma[Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}}]$;

(3) *si* $\psi_Y : H_Y \xrightarrow{\sim} G$ *est un isomorphisme, on a*

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G} = \bigcup_{\sigma\in H^1(k,F)} f_\sigma[Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G}].$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ dans les trois cas est définie par le pullback des torseurs et la fonctorialité de l'accouplement de Brauer–Manin. On considère l'inclusion $\subset$.

Dans le cas (1), il suffit de montrer que, pour tout $x \in X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}_G}$, il existe un $\sigma \in H^1(k, F)$ et un $y \in Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}_{H_Y}}$ tels que $f_\sigma(y) = x$. On fixe un tel x.

Pour tout $\sigma \in H^1(k, F)$, soient

$$\Delta_\sigma := f_\sigma^{-1}(x) \cap Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k), \quad \Sigma := \{\sigma \in H^1(k, F) : \ \Delta_\sigma \neq \varnothing\} \quad \text{et} \quad \Delta := \bigsqcup_{\sigma\in\Sigma} \Delta_\sigma.$$

D'après le lemme 5.3, Δ et Σ sont finis.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des *X-torseurs sur Y sous k-groupes finis* i.e., l'ensemble des quintuples

$$\big(\sigma, E, E \xrightarrow{\psi} F_\sigma, V \xrightarrow{h_V} X, V \xrightarrow{h} Y_\sigma\big)$$

avec $\sigma \in H^1(k, F)$, E un k-groupe fini, ψ un homomorphisme surjectif, $V \xrightarrow{h_V} X$ un E-torseur et h un E-morphisme sur X. Alors $\psi_*([V]) = [Y_\sigma] \in H^1(k, F)$ et $h : V \to Y_\sigma$ est un $\mathrm{Ker}(\psi)$-torseur. Donc $h_\alpha : V_\alpha \to Y_{\sigma+\psi_*(\alpha)}$ est un $\mathrm{Ker}(\psi_\alpha)$-torseur pour tout $\alpha \in H^1(k, E)$. Soit

$$\Delta_V := \big\{y \in \Delta : \ \exists\alpha \in H^1(k, E) \text{ tel que } y \in h_\alpha(V_\alpha(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_V}(V_\alpha)})\big\}.$$

Par l'hypothèse sur x, l'ensemble Δ_V est non vide.

On définit un ordre partiel de $\mathcal{S}$: pour tous $(\sigma_1, E_1, \psi_1, V_1, h_1), (\sigma_2, E_2, \psi_2, V_2, h_2) \in \mathcal{S}$, on a $(\sigma_1, E_1, \psi_1, V_1, h_1) \le (\sigma_2, E_2, \psi_2, V_2, h_2)$ si et seulement si $\sigma_1 = \sigma_2$ et s'il existe un $\alpha \in H^1(k, E_1)$, un homomorphisme surjectif $\phi : E_2 \to E_{1,\alpha}$ et un E_2-morphisme $h_\phi : V_2 \to V_{1,\alpha}$ sur Y_{σ_1}. Dans ce cas, on a $\Delta_{V_2} \subset \Delta_{V_1}$.

Puisque Δ est fini, il existe un quintuple $(\sigma, E_0, \psi_0, V_0, h_0)$ dans S tel que Δ_{V_0} soit minimal. On fixe un $y \in \Delta_{V_0}$. Après avoir remplacé σ par $\sigma + \psi_{0,*}(\alpha)$ pour certain $\alpha \in H^1(k, E_0)$, on peut supposer que $y \in Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)$.

Pour tout torseur $Z \xrightarrow{f_1} Y_\sigma$ sous un k-groupe fini F_1, d'après [Skorobogatov 2009, Proposition 2.3 et (4)], il existe un $(\sigma, E, \psi, h_V : V \to X, h) \in \mathcal{S}$, un homomorphisme surjectif $\mathrm{Ker}(\psi) \to F_1$ et un $\mathrm{Ker}(\psi)$-morphisme $V \to Z$ sur Y_σ avec

$$V := R_{Y_\sigma\times_k F_\sigma/Y_\sigma}(Z \times_k F_\sigma) \cong R_{Y_\sigma/X}(Z) \times_X Y_\sigma \xrightarrow{h_V} X. \tag{6-1}$$

Ceci induit

$$\Delta_V \subset \bigcup_{\alpha\in H^1(k,\mathrm{Ker}(\psi))} h_\alpha(V_\alpha(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_V}(V_\alpha)}) \subset \bigcup_{\alpha\in H^1(k,F_1)} f_{1,\alpha}(Z_\alpha(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_Z}(Z_\alpha)}).$$

Par ailleurs, on a :

$$(\sigma, E_0, \psi_0, V_0, h_0), (\sigma, E, \psi, V, h) \le \big(\sigma, E_0 \times_{F_\sigma} E, \psi_0 \circ (\mathrm{id}_{E_0} \times_{F_\sigma} \psi), V_0 \times_{Y_\sigma} V, h_0 \circ (\mathrm{id}_{V_0} \times_{Y_\sigma} h)\big)$$

dans $\mathcal{S}$, et donc $\Delta_{V_0} \supset \Delta_{V_0 \times_{Y_\sigma} V} \subset \Delta_V$. Puisque Δ_{V_0} est minimal, on a $\Delta_{V_0} = \Delta_{V_0 \times_{Y_\sigma} V} \subset \Delta_V$. Donc $y \in Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét}, \mathrm{Br}_{H_Y}}$, d'où l'on déduit (1).

L'énoncé (2) découle du même argument que l'énoncé (1).

Pour (3), d'après le corollaire 3.6, le torseur $V \to X$ dans (6-1) est G-compatible. L'énoncé (3) découle du même argument que l'énoncé (1). □

La proposition suivante généralise un lemme de Stoll [2007] (cf. lemme 5.4).

Proposition 6.3. *Soient G un k-groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. Supposons que $X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét}, \mathrm{Br}_G} \neq \varnothing$. Alors, pour tout k-groupe fini F et tout F-torseur $Y \to X$, il existe un $\sigma \in H^1(k, F)$ tel qu'il existe une composante connexe $Y' \subset Y_\sigma$ qui est géométriquement intègre.*

De plus, dans ce cas, il existe un sous k-groupe fermé $F' \subset F_\sigma$ tel que Y' soit un F'-torseur sur X, où l'action de F' sur Y' est induite par l'action de F_σ sur Y_σ.

Démonstration. Le morphisme $G \times X \xrightarrow{\rho} X$ induit un homomorphisme $\rho_{\pi_1} : \pi_1(G_{\bar{k}}) \to \pi_1(X)$. D'après le corollaire 3.5, l'image $\mathrm{Im}(\rho_{\pi_1})$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(X)$ et elle est contenue dans le centre de $\pi_1(X_{\bar{k}})$. Pour tout k-groupe fini F_1, d'après (1-5), tout F_1-torseur $Y_1 \to X$ induit un homomorphisme $\theta_1 : \pi_1(X_{\bar{k}}) \to F_1(\bar{k})$ à conjugaison près et, d'après la proposition 3.3 et le corollaire 3.5, Y_1 est G-compatible si et seulement si $\theta_1 \circ \rho_{\pi_1} = 0$.

D'après (1-5), soit $\alpha \in H^1(\pi_1(X), F(\bar{k}))$ un 1-cocycle qui correspond à $[Y] \in H^1(X, F)$. Il existe un sous-groupe ouvert distingué $\Delta \subset \pi_1(X)$ tel que $\alpha|_\Delta = 0$. Soient $\Delta_{\bar{k}} := \Delta \cap \pi_1(X_{\bar{k}})$ et $\alpha_{\bar{k}} := \alpha|_{\pi_1(X_{\bar{k}})}$. Alors $\alpha_{\bar{k}}$ est un homomorphisme $\pi_1(X_{\bar{k}}) \to F(\bar{k})$.

Lemme 6.4. *Pour trouver Y' dans la proposition 6.3, on peut supposer que $\Delta_{\bar{k}} \cdot \mathrm{Im}(\rho_{\pi_1}) = \pi_1(X_{\bar{k}})$ et donc $\mathrm{Im}(\alpha_{\bar{k}}) = \mathrm{Im}(\alpha_{\bar{k}} \circ \rho_{\pi_1})$.*

Démonstration. Le sous-groupe $\mathrm{Im}(\rho_{\pi_1}) \cdot \Delta$ est ouvert normal dans $\pi_1(X)$. Soit $Y_2 \to X$ le revêtement galoisien correspondant. Par construction, $Y_2 \to X$ est un torseur G-compatible sous un k-groupe constant $F_2 = \pi_1(X)/(\mathrm{Im}(\rho_{\pi_1}) \cdot \Delta)$. Par hypothèse, il existe un $\sigma \in H^1(k, F_2)$ tel que $Y_{2,\sigma}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Y_{2,\sigma})} \neq \varnothing$. D'après le lemme 5.2 et (5-5), il existe une composante connexe $Y_3 \subset Y_2$ telle que Y_3 est géométriquement intègre. Ainsi $Y_3 \to X$ est un torseur sous un sous-groupe fermé $F_3 \subset F_{2,\sigma}$ et on a

$$\mathrm{Im}(\pi_1(Y_{3,\bar{k}}) \hookrightarrow \pi_1(X_{\bar{k}})) = \pi_1(X_{\bar{k}}) \cap \mathrm{Im}(\pi_1(Y_2) \to \pi_1(X)) = \mathrm{Im}(\rho_{\pi_1}) \cdot \Delta_{\bar{k}}.$$

Alors $Y_3 \to X$ est G-compatible. Par le lemme 6.2(3), après avoir remplacé Y_3 par son tordu, on peut supposer que $Y_3(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét}, \mathrm{Br}_G} \neq \varnothing$.

S'il existe un $\sigma \in H^1(k, F)$ et une composante connexe Y_3' du F_σ-torseur $Y_\sigma \times_X Y_3 \to Y_3$ tels que Y_3' soit géométriquement intègre, alors l'image de Y_3' par le morphisme fini étale $Y_\sigma \times_X Y_3 \to Y_\sigma$ est une composante connexe Y' de Y_σ telle que Y' soit géométriquement intègre. Donc on peut remplacer X par

Y_3 et, après avoir remplacé X par Y_3, on peut supposer que $\Delta_{\bar{k}} \cdot \mathrm{Im}(\rho_{\pi_1}) = \pi_1(X_{\bar{k}})$. Puisque $\alpha_{\bar{k}}(\Delta_{\bar{k}}) = 0$, on a $\mathrm{Im}(\alpha_{\bar{k}}) = \mathrm{Im}(\alpha_{\bar{k}} \circ \rho_{\pi_1})$. $\square$

Dans ce cas, puisque $\pi_1(G_{\bar{k}})$ est commutatif, $\mathrm{Im}(\alpha_{\bar{k}})$ est commutatif. D'après le corollaire 3.5, $\alpha_{\bar{k}}$ induit un homomorphisme $\pi_1(X_{\bar{k}})^{\mathrm{ab}} \to F(\bar{k})$ de noyau Γ_k-invariant, car α est défini sur k. D'après le corollaire 2.4, il existe un k-groupe fini commutatif S et un S-torseur $\mathcal{T} \to X$ tels que $\mathcal{T}$ soit géométriquement intègre, $S(\bar{k}) = \mathrm{Im}(\alpha_{\bar{k}})$ et que, dans

$$H^1(X_{\bar{k}}, S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(X_{\bar{k}}), \mathrm{Im}(\alpha_{\bar{k}})),$$

on ait $[\mathcal{T}_{\bar{k}}] = \alpha_{\bar{k}}$.

Soit $(H_Y \xrightarrow{\psi_Y} G)$ le groupe minimal compatible au F-torseur Y. D'après la remarque 3.10, $(H_Y \xrightarrow{\psi_Y} G)$ est aussi le groupe minimal compatible au S-torseur $\mathcal{T}$. D'après le corollaire 3.11, $\mathrm{Ker}(\psi_Y) \cong S$. Donc $Y_4 := \mathcal{T} \times_X Y$ est une H_Y-variété et $Y_4 \to X$ est un $(S \times F)$-torseur H_Y-compatible. Donc $Y_5 := Y_4/\mathrm{Ker}(\psi_Y) \to X$ est un F-torseur G-compatible et on a un F-morphisme fini étale $\phi_5 : Y_5 \to Y/\mathrm{Ker}(\psi_Y)$. Par hypothèse, il existe un $\sigma \in H^1(k, F)$ tel que $Y_{5,\sigma}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Y_{5,\sigma})} \neq \varnothing$. D'après le lemme 5.2, il existe une composante connexe Y_5' de $Y_{5,\sigma}$ telle que Y_5' soit géométriquement intègre. Ainsi $\phi_5(Y_5')$ est une composante connexe de $(Y/\mathrm{Ker}(\psi_Y))_\sigma$, qui est géométriquement intègre. Puisque H_Y est connexe, les composantes connexes géométriques de $(Y/\mathrm{Ker}(\psi_Y))_\sigma$ et de Y_σ sont les mêmes, d'où le résultat. $\square$

Lemme 6.5. $$X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}_G} = X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout $x \in X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G}$, tout k-groupe fini F et tout F-torseur $Y \xrightarrow{f} X$, il existe un $\sigma \in H^1(k, F)$, un $y \in Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_Y}(Y_\sigma)}$ tels que $f_\sigma(y) = x$, où $(H_Y \xrightarrow{\psi_Y} G)$ est le groupe minimal compatible au F-torseur Y.

On fixe de tels x, F, Y, f.

D'après la proposition 6.3, on peut supposer que Y est géométriquement intègre.

D'après le corollaire 3.11, il existe un plongement $\phi : \mathrm{Ker}(\psi_Y) \to F$ d'image centrale compatible avec les actions de $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$ et de F sur Y. Ceci induit une suite exacte de k-groupes finis

$$1 \to \mathrm{Ker}(\psi_Y) \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{\phi_1} F_1 \to 1$$

qui définit F_1. Alors $Y_1 := Y/\mathrm{Ker}(\psi_Y) \xrightarrow{f_1} X$ est un F_1-torseur G-compatible sur X. De plus, Y_1 est lisse et géométriquement intègre.

Par hypothèse, il existe un $\sigma_1 \in H^1(k, F_1)$ et un $y_1 \in Y_{1,\sigma_1}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Y_{1,\sigma_1})}$ tels que $f_{1,\sigma_1}(y_1) = x$. D'après le corollaire 5.8, il existe un $\sigma_0 \in H^1(k, F)$ tel que $\phi_{1,*}(\sigma_0) = \sigma_1$. Comme l'image de ϕ est centrale dans F, on a $\mathrm{Ker}(\psi_Y)_{\sigma_0} = \mathrm{Ker}(\psi_Y)$.

L'argument ci-dessus donne un $\mathrm{Ker}(\psi_Y)$-torseur $Y_{\sigma_0} \to Y_{1,\sigma_1}$ compatible avec l'action de H_Y. D'après la proposition 5.1, il existe un $\sigma_2 \in H^1(k, \mathrm{Ker}(\psi_Y))$ et un $y \in Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_{H_Y}(Y_\sigma)}$ avec $\sigma := \sigma_0 + \sigma_2 \in H^1(k, F)$ tels que $f_\sigma(y) = x$. $\square$

Lemme 6.6. $$X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}} = X(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}_G}.$$

Démonstration. On peut supposer que $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét}, \mathrm{Br}_G} \neq \varnothing$. Il suffit de montrer que, pour tout k-groupe fini F et tout F-torseur $f : Y \to X$, on a

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét}, \mathrm{Br}_G} \subset \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(Y_\sigma)}).$$

D'après la proposition 6.3, on peut supposer que Y est géométriquement intègre. L'énoncé découle de la proposition 6.1 et du lemme 6.2 (1). □

Démonstration du théorème 1.4. D'après le lemme 5.2 et (5-5), on peut supposer que X est géométriquement intègre. On obtient le théorème par combinaison du lemme 6.6 et du lemme 6.5. □

Remarque 6.7. Rappelons les catégories **AB** et **GX** dans paragraphe 4. On fixe un objet $(G, X) \in \mathbf{GX}$.

Soit $\mathbf{GX}_X$ l'ensemble des objets $(H, Y) \in \mathbf{GX}$ tels qu'il existe un morphisme $(\psi, f) : (H, Y) \to (G, X)$ dans $\mathbf{GX}$ avec ψ, f finis.

Dans toute cette section (paragraphe 6), pour établir le théorème 1.4 de (G, X), l'hypothèse que G est linéaire et la notion de sous-groupe de Brauer invariant sont utilisés seulement pour appliquer la proposition 3.12, la proposition 5.1, le corollaire 4.2, le lemme 5.2 et le corollaire 5.8 à l'élément dans $\mathbf{GX}_X$. Donc, cette section a essentiellement montré :

> pour tout foncteur contravariant $B(-,-) : \mathbf{GX} \to \mathbf{AB}$ qui associe au couple (H, Y) un sous-groupe $B(H, Y) \subset \mathrm{Br}(Y)$, si l'on peut établir la proposition 3.12, la proposition 5.1, le corollaire 4.2, le lemme 5.2 et le corollaire 5.8 pour tout élément dans $\mathbf{GX}_X$ (en remplaçant tout groupe de Brauer invariant par le $B(-,-)$ correspondant), alors on a $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét}, \mathrm{Br}} = X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét}, B(G,-)}$, où $X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét}, B(G,-)}$ est défini de la même façon que $X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét}, \mathrm{Br}_G}$.

7. Démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété.

Démonstration du théorème 1.1. D'après le lemme 5.2 et (5-5), on peut supposer que Z est géométriquement intègre. Si G est connexe, l'énoncé découle du théorème 1.4 et de la proposition 5.5. Si G est fini, d'après la proposition 6.3, on peut supposer que X est géométriquement intègre, et le résultat découle du lemme 6.2(2).

Pour établir le cas général, on reprend certains arguments de [Demarche 2009b; Cao et al. 2019a]. Il existe une suite exacte

$$1 \to N \to G \xrightarrow{\psi} F \to 1$$

de k-groupes linéaires avec N un k-groupe linéaire connexe et F un k-groupe fini. Alors

$$h : U := X/N \to Z$$

est un F-torseur. Notons $q : X \to U$. Pour un $z \in Z(\mathbf{A}_k)^{\text{ét}, \mathrm{Br}}$, il existe un $\sigma \in H^1(k, F)$ et un $u \in U_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{ét}, \mathrm{Br}}$ tels que $h_\sigma(u) = z$. D'après la proposition 5.7(1), il existe un $\alpha_0 \in H^1(k, G)$ tel que $\psi_*(\alpha_0) = \sigma$. Ceci induit une suite exacte

$$1 \to N' \xrightarrow{\phi} G_{\alpha_0} \xrightarrow{\psi_{\alpha_0}} F_\sigma \to 1$$

de k-groupes linéaires. Alors $N'_{\bar{k}} \cong N_{\bar{k}}$ et N' est un k-groupe linéaire connexe. Ainsi $q_{\alpha_0} : X_{\alpha_0} \to U_\sigma$ est un N'-torseur. Donc il existe un $\beta \in H^1(k, N')$ et un $x \in (X_{\alpha_0})_\beta(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ tels que $(q_{\alpha_0})_\beta(x) = u$. Soit $\alpha := \alpha_0 + \phi_*(\beta)$. Alors $(X_{\alpha_0})_\beta = X_\alpha$ et $p_\alpha = h_\sigma \circ (q_{\alpha_0})_\beta$. Donc $x \in X_\alpha(\boldsymbol{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ et $p_\alpha(x) = z$, d'où le résultat. □

Démonstration du théorème 1.2. Ceci découle du théorème 1.1 et de [Cao et al. 2019a, Theorem 1.5]. □

Démonstration du corollaire 1.5. Pour tout k-groupe fini F et tout F-torseur G-compatible $f : Y \to X$, d'après le corollaire 3.5(4), il existe un F-torseur M sur k tel que $Y \cong M \times_k X$ comme F-torseurs. Alors il existe un $\sigma_0 \in H^1(k, F)$ tel que $Y_{\sigma_0} \cong F \times X$. Donc

$$X(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)} \subset f_{\sigma_0}(Y_{\sigma_0}(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Y_{\sigma_0})}) \subset \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y_\sigma(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Y_\sigma)}).$$

Ainsi $X(\boldsymbol{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G} = X(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(X)}$ et le résultat découle du théorème 1.4. □

Remerciements

Je remercie très chaleureusement Jean-Louis Colliot-Thélène et Cyril Demarche pour leurs commentaires.

Bibliographie

[Balestrieri 2018] F. Balestrieri, "Iterating the algebraic étale-Brauer set", *J. Number Theory* **182** (2018), 284–295. MR Zbl

[Borovoi et Demarche 2013] M. Borovoi et C. Demarche, "Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces", *Comment. Math. Helv.* **88**:1 (2013), 1–54. MR Zbl

[Brion et Szamuely 2013] M. Brion et T. Szamuely, "Prime-to-p étale covers of algebraic groups and homogeneous spaces", *Bull. Lond. Math. Soc.* **45**:3 (2013), 602–612. MR Zbl

[Cao 2018] Y. Cao, "Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire", *Compos. Math.* **154**:4 (2018), 773–819. MR Zbl

[Cao et al. 2019a] Y. Cao, C. Demarche et F. Xu, "Comparing descent obstruction and Brauer–Manin obstruction for open varieties", *Trans. Amer. Math. Soc.* **371**:12 (2019), 8625–8650. MR Zbl

[Cao et al. 2019b] Y. Cao, Y. Liang et F. Xu, "Arithmetic purity of strong approximation for homogeneous spaces", *J. Math. Pures Appl.* (9) **132** (2019), 334–368. MR Zbl

[Colliot-Thélène 2008] J.-L. Colliot-Thélène, "Résolutions flasques des groupes linéaires connexes", *J. Reine Angew. Math.* **618** (2008), 77–133. MR Zbl

[Colliot-Thélène et Sansuc 1987a] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, "La descente sur les variétés rationnelles, II", *Duke Math. J.* **54**:2 (1987), 375–492. MR Zbl

[Colliot-Thélène et Sansuc 1987b] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, "Principal homogeneous spaces under flasque tori: applications", *J. Algebra* **106**:1 (1987), 148–205. MR Zbl

[Conrad 2012] B. Conrad, "Weil and Grothendieck approaches to adelic points", *Enseign. Math.* (2) **58**:1-2 (2012), 61–97. MR Zbl

[Demarche 2009a] C. Demarche, *Méthodes cohomologiques pour l'étude des points rationnels sur les espaces homogènes*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, 2009.

[Demarche 2009b] C. Demarche, "Obstruction de descente et obstruction de Brauer–Manin étale", *Algebra Number Theory* **3**:2 (2009), 237–254. MR Zbl

[Fu 2011] L. Fu, *Étale cohomology theory*, Nankai Tracts in Math. **13**, World Sci., Hackensack, NJ, 2011. MR Zbl

[Harari et Skorobogatov 2002] D. Harari et A. N. Skorobogatov, "Non-abelian cohomology and rational points", *Compos. Math.* **130**:3 (2002), 241–273. MR Zbl

[Harari et Skorobogatov 2013] D. Harari et A. N. Skorobogatov, "Descent theory for open varieties", pp. 250–279 dans *Torsors, étale homotopy and applications to rational points* (Edinburgh, 2011), édité par A. N. Skorobogatov, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **405**, Cambridge Univ. Press, 2013. MR Zbl

[Kashiwara et Schapira 2006] M. Kashiwara et P. Schapira, *Categories and sheaves*, Grundlehren der Math. Wissenschaften **332**, Springer, 2006. MR Zbl

[Liu et Xu 2015] Q. Liu et F. Xu, "Very strong approximation for certain algebraic varieties", *Math. Ann.* **363**:3-4 (2015), 701–731. MR Zbl

[Manin 1971] Y. I. Manin, "Le groupe de Brauer–Grothendieck en géométrie diophantienne", pp. 401–411 dans *Actes du Congrès International des Mathématiciens, I* (Nice, 1970), édité par M. Berger et al., Gauthier-Villars, Paris, 1971. MR Zbl

[Milne 1980] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series **33**, Princeton Univ. Press, 1980. MR Zbl

[Miyanishi 1972] M. Miyanishi, "On the algebraic fundamental group of an algebraic group", *J. Math. Kyoto Univ.* **12**:2 (1972), 351–367. MR Zbl

[Poonen 2010] B. Poonen, "Insufficiency of the Brauer–Manin obstruction applied to étale covers", *Ann. of Math.* (2) **171**:3 (2010), 2157–2169. MR Zbl

[Poonen 2017] B. Poonen, *Rational points on varieties*, Grad. Studies in Math. **186**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017. MR Zbl

[Sansuc 1981] J.-J. Sansuc, "Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres", *J. Reine Angew. Math.* **327** (1981), 12–80. MR Zbl

[Serre 1964] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5**, Springer, 1964.

[SGA 1 1971] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental* (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961), Lecture Notes in Math. **224**, Springer, 1971. MR Zbl

[SGA $4\frac{1}{2}$ 1977] P. Deligne, *Cohomologie étale* (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie), Lecture Notes in Math. **569**, Springer, 1977. MR Zbl

[SGA 4_3 1973] M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Tome 3: Exposés IX–XIX* (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1963–1964), Lecture Notes in Math. **305**, Springer, 1973. MR Zbl

[Skorobogatov 1999] A. N. Skorobogatov, "Beyond the Manin obstruction", *Invent. Math.* **135**:2 (1999), 399–424. MR Zbl

[Skorobogatov 2001] A. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Math. **144**, Cambridge Univ. Press, 2001. MR Zbl

[Skorobogatov 2009] A. Skorobogatov, "Descent obstruction is equivalent to étale Brauer–Manin obstruction", *Math. Ann.* **344**:3 (2009), 501–510. MR Zbl

[Skorobogatov et Zarhin 2014] A. N. Skorobogatov et Y. G. Zarhin, "The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties", *J. Eur. Math. Soc.* **16**:4 (2014), 749–769. MR Zbl

[Stoll 2007] M. Stoll, "Finite descent obstructions and rational points on curves", *Algebra Number Theory* **1**:4 (2007), 349–391. MR Zbl

[Szamuely 2009] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Stud. Adv. Math. **117**, Cambridge Univ. Press, 2009. MR Zbl

Communicated by Bjorn Poonen
Received 2019-07-23 Revised 2020-02-10 Accepted 2020-04-12

yang.cao@math.uni-hannover.de *IAZD, Leibniz Universität Hannover, Germany*

mathematical sciences publishers msp

Algebra & Number Theory

msp.org/ant

See inside back cover or msp.org/ant for submission instructions.

The subscription price for 2020 is US $415/year for the electronic version, and $620/year (+$60, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Algebra & Number Theory (ISSN 1944-7833 electronic, 1937-0652 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

ANT peer review and production are managed by EditFLOW® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Algebra & Number Theory

Volume 14 No. 8 2020